

Nom :

Mathématiques

Cours

double-diplôme
ESCP x CentraleSupélec

Livret I

Chapitre

1. Espaces préhilbertiens

2026

Le programme

I. Espaces préhilbertiens réels et complexes

Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens, formes sesquilinéaires, produit scalaire complexe, norme, représentation matricielle des formes sesquilinéaires, inégalité de Cauchy-Schwarz.

II. Compléments en analyse

Intégrales des fonctions complexes, séries entières.

III. Séries de Fourier

Définition des séries de Fourier, conditions de convergence, interprétation géométrique des séries de Fourier.

IV. Équations différentielles I

Équations différentielles linéaires du premier et second ordre, problème de Cauchy, cas des fonctions à valeur dans un espace vectoriel de dimension finie supérieure à 1, équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n .

V. Déterminants

Déterminant d'un endomorphisme, déterminant d'une matrice, propriétés.

VI. Réduction d'endomorphismes

Polynômes annulateurs, vecteurs propres et valeurs propres, polynôme minimal, polynôme caractéristique, diagonalisation, trigonalisation, cas nilpotent.

VII. Equations différentielles II

Cas des fonctions à valeur dans un espace vectoriel de dimension finie supérieure à 1, équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n .

VIII. Python

Manipulation de matrices, programmation d'algorithmes pour la réduction d'endomorphismes.

Espaces préhilbertiens

Ἀγεωμέτρητος μηδὲις εἰσίτω

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Inscription que Platon aurait fait graver à l'entrée de l'Académie, son école d'Athènes.

1

Espaces euclidiens (rappels d'ECG2)

1.1 Formes bilinéaires, produit scalaire

Définition 1 (forme bilinéaire)

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une **forme bilinéaire** si elle est

→ linéaire à droite

$$\forall u, v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, w).$$

→ linéaire à gauche

$$\forall u, v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda v + \mu w, u) = \lambda \varphi(v, u) + \mu \varphi(w, u).$$

Définition 2 (produit scalaire)

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est un **produit scalaire** si :

→ φ est une forme bilinéaire.

→ φ est symétrique :

$$\forall u, v \in E, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

→ φ est positive :

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) \geq 0.$$

→ φ est définie :

$$\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0_E.$$

Notation. On écrit souvent $\langle u, v \rangle$ au lieu de $\varphi(u, v)$.

Exemples. Nous en donnons plusieurs pour illustrer la diversité des situations.

- Dans $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, posons $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$** .

- Dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Donnons deux exemples dans le cas polynomial.

→ Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, n+1$ réels deux à deux distincts. L'application suivante est un produit scalaire

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i).$$

→ On peut aussi poser pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t) dt.$$

• Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Noter, comme souvent, qu'on identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

• Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^t B).$$

• Dans $\mathcal{C}^0([a; b])$ avec $a < b$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}^0([a; b])$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Définition 3 (norme)

Soit E , un espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ . L'application

$$N : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u, u)} \end{cases}$$

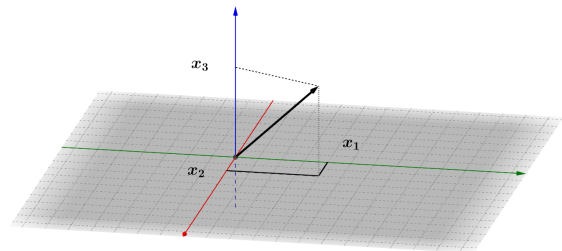
est appelée **norme associée au produit scalaire** φ .

Notation. On note souvent $\|\cdot\|$ au lieu de N .

Exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on constate que la norme représente la distance à l'origine, ou encore la longueur du vecteur.



Remarque. Par extension, pour $u, v \in E$, $\|u\|$ représente la « longueur » du vecteur u alors que $\|u - v\|$ correspond à la « distance » entre les deux vecteurs.

Proposition 4 (règles de calcul)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont $\|\cdot\|$ est la norme associée.

- $\forall u \in E, \quad \|u\| = 0 \iff u = 0_E.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$
- $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$

Exercice 1



♦ Identité du parallélogramme et formule de polarisation

Montrer que pour tous $u, v \in E$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Théorème 5 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont $\|\cdot\|$ est la norme associée.

$$\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée.

Exercice 2

◆◆ Preuve

1. Justifier que si la famille (u, v) est liée alors $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
2. Dans la suite, on suppose la famille (u, v) libre. À l'aide de l'application P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$, justifier que

$$|\langle u, v \rangle| < \|u\| \cdot \|v\|.$$

AB2

Exemple. En reprenant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$\forall (x_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Proposition 6 (inégalité triangulaire)

Pour toute famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p \|u_i\|.$$

Exercice 3

◆◆ Soient E un espace euclidien et $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.

1. Soient $u, v \in E$.
Que peut-on dire de u et v si on a le cas d'égalité $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$?
2. ☞ Démontrer que B est une partie strictement convexe de E , c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$ avec $x \neq y$, tout $t \in]0; 1[$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$.
3. Illustrer ce résultat dans $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire canonique.

AB5

Orthogonalité et vecteurs**Définition 7** (vecteurs orthogonaux)

Soient E , un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Deux vecteurs u et v de E sont dits **orthogonaux**, noté $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.

Remarque. Le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tous les autres vecteurs de E est le vecteur nul. Autrement dit, pour tout $u \in E$, on a l'équivalence :

$$(\forall v \in E, \quad \langle u, v \rangle = 0) \iff u = 0_E.$$



Attention. La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire.

Exercice 4



◆◆ Deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on pose

$$\varphi_1(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \quad \text{et} \quad \varphi_2(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Vérifier que φ_1 et φ_2 définissent deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Notons P_1 le polynôme d'expression $P_1(x) = x$.
Donner un vecteur orthogonal à P_1 relativement à φ_1 mais non orthogonal pour φ_2 et inversement.

AB6

Théorème 8 (de Pythagore)

Deux vecteurs u et v sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Définition 9 (famille normée, orthogonale, orthonormée)

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

- La famille est dite **normée** si pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\|u_i\| = 1$.
- La famille est dite **orthogonale** si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $u_i \perp u_j$.
- La famille est dite une famille **orthonormée** (ou orthonormale) si c'est une famille orthogonale et normée.

Exercice 5



◇ Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1.
 - a) Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
 - b) Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
En déduire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

2. Généralisation.

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$ on considère maintenant $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

- a) Vérifier que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- b) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.

AB8

Remarques. Autrement dit, la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Une des implications du théorème de Pythagore se généralise, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E , alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

La réciproque est fautive : ce n'est pas parce que cette égalité est vérifiée que la famille est orthogonale.

Proposition 10 (orthogonalité implique liberté)

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

- Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, et si aucun des vecteurs de $\mathcal{F}$ n'est le vecteur nul, **alors** $\mathcal{F}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est orthonormée, **alors** $\mathcal{F}$ est libre.

Remarque. Les réciproques sont fausses.

Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

Définition 11 (sous-espaces orthogonaux)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **orthogonaux** si

$$\forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad u \perp v.$$

Remarque. Soient $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $(\varepsilon_j)_{j \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ deux familles respectivement de F et G . Si les familles sont génératrices, alors le sous espace vectoriel F est orthogonal à G si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad e_i \perp \varepsilon_j.$$

Exercice 6



♦ Exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire.
2. Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$), l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

AB13

Définition 12 (le s.e.v orthogonal)

Soit F une partie de E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Posons

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \quad x \perp y\}.$$

Alors :

- L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ s'appelle **l'orthogonal** de F dans E .

Exemples. On a $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Remarques.

- Si G est un s.e.v de E tel que G est orthogonal à F , alors $G \subset F^\perp$. Autrement dit, $F^\perp$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui soit orthogonal à F .
- Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.

Soit $u \in G^\perp$. Montrons que $u \in F^\perp$.

Soit $v \in F$. Par hypothèse, $v \in G$ et par définition $\langle u, v \rangle = 0$ d'où $u \perp v$ et $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 7



♦ Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Prouver les énoncés suivants.

1. $F \subset (F^\perp)^\perp$.
2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
3. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
4. $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

AB14

1.2 Espaces euclidiens et bases orthonormées

Définition 13 (espaces euclidiens)

Un **espace euclidien** est la donnée :

- d'un espace vectoriel E de dimension finie,
- d'un produit scalaire sur E .

On note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemples. Reprenons les exemples étudiés précédemment.

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(^tAB)$.
- $\mathbb{R}_n[X]$ muni d'un produit scalaire.
- $\mathcal{C}^0([a, b])$ n'est pas un espace euclidien.

Définitions, exemples et coordonnées

Comme son nom l'indique une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une **base orthonormée** (abrégé en b.o.n) si c'est à la fois :

- une base : $\forall u \in E, \exists ! (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$
- une famille orthonormée : $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Exemples. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des b.o.n pour les produits scalaires canoniques.

Exercice 8



◇ Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, \quad \varepsilon_2 = \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = e_3$$

reste une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Donner une interprétation graphique.

AB15

Théorème 14 (coordonnées dans une b.o.n)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée.

Pour tout vecteur $u \in E$,

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont les réels $\langle u, e_1 \rangle, \dots, \langle u, e_n \rangle$.



Attention. Il ne faut pas oublier l'hypothèse « base orthonormée ».

Proposition 15 (norme et b.o.n)

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tous $u, v \in E$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle^2.$$

Théorèmes d'existence d'une b.o.n et procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, une base quelconque d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Prouvons qu'il existe une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :

- $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.
- Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{vect}(f_1, f_2, \dots, f_k)$.

La preuve s'effectue par récurrence et donne un procédé de construction de la base $\mathcal{B}$ à partir de la base $\mathcal{C}$.

⇒ Voir procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Applications :

- Tout espace euclidien admet une base orthonormée.
- Toute famille orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peut être complétée en une base orthonormée de E . Autrement dit, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée de E de dimension n , il existe des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E .

Proposition 16 (expression du produit scalaire avec les matrices colonnes)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u, v \in E$.

Si on note $\left| \begin{array}{l} \rightarrow U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u). \\ \rightarrow V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v). \end{array} \right.$

Alors $\langle u, v \rangle = {}^tUV$ et $\|u\|^2 = {}^tUU$.

 **Attention.** Rappelons que ces énoncés ne sont valables que dans le cadre d'une base orthonormée.

Définition 17 (matrice orthogonale)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est une **matrice orthogonale** si M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Remarque. D'après les résultats sur les matrices, M est orthogonale si et seulement si ${}^tMM = I_n$ ou $M{}^tM = I_n$.

Exemple. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ est orthogonale.

Remarques.

- Une matrice est orthogonale si et seulement si les colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
- L'ensemble $\mathcal{O}_n$ des matrices orthogonales de taille (n, n) a une structure de groupe multiplicatif :

- $\rightarrow$ Présence d'un élément neutre : $I_n \in \mathcal{O}_n$.
- $\rightarrow$ Stabilité par passage à l'inverse : $\forall P \in \mathcal{O}_n, \quad P^{-1} \in \mathcal{O}_n$.
- $\rightarrow$ Stabilité par produit : $\forall P, Q \in \mathcal{O}_n, \quad PQ \in \mathcal{O}_n$.

Exercice 9



- Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes*
- ◆ 1. Justifier les trois points de la remarque précédente.
 - ◆ 2. Que dire d'une matrice diagonale et orthogonale?
 - ◆◆ 3. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale avec $\det(P) > 0$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P = R_\theta$.

AB17

1.3 Le supplémentaire orthogonal

Tout s.e.v d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet un supplémentaire orthogonal. Autrement dit, si F est un s.e.v de E , il existe un s.e.v G de E tel que

$$F \oplus G = E \quad \text{et} \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad u \perp v.$$

En effet, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , alors on peut choisir $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une complétion en une base orthonormée de E . Dans ce cas, $\text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ fournit un supplémentaire orthogonal.

Proposition 18 (propriétés)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .
- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

 **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire, mais unicité du supplémentaire orthogonal.

Exercice 10



Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Les questions sont indépendantes

1. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ puis $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

AB18

2

Espaces préhilbertiens réels

2.1 Formes polaires, formes quadratiques

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On rappelle que φ est symétrique si

$$\forall u, v \in E, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

Définition 19 (forme quadratique, forme polaire)

Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que Φ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire φ telle que

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x) = \varphi(x, x) \quad (\star)$$

Il existe une unique forme bilinéaire symétrique vérifiant $(\star)$, on dit que φ est la **forme polaire de Φ** .

• Règles de calculs

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) &= \frac{1}{2}(\Phi(x, y) - \Phi(x) - \Phi(y)) \\ \varphi(x, y) &= \frac{1}{4}(\Phi(x + y) - \Phi(x - y)) \\ \Phi(\lambda x + y) &= \lambda^2 \Phi(x) + \lambda \varphi(x, y) + \Phi(y). \end{aligned}$$

Notons un point intéressant avec la première (ou la seconde formule) : la connaissance de la formule quadratique Φ suffit pour retrouver la forme polaire φ . On prouve ainsi l'existence et l'unicité évoquées dans la définition.

Représentation matricielle de la forme polaire en dimension finie

Proposition 20 (lien matrice/forme bilinéaire)

Soient φ une forme bilinéaire et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de E .

Alors il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = {}^t X A Y$$

où X (resp. Y) désigne la matrice de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$. La matrice $A = [a_{i,j}]_{i,j}$ est telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \varphi(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

Remarque. On définit ainsi un isomorphisme entre $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note alors $A = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$.

Exercice 11



1. Prouver la proposition précédente.
2. Vérifier que $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et donner sa dimension à l'aide de celle de E .
3. Faire de même avec $\mathcal{L}_2^s(E, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E .

ABdd1

Formes positives, définies positives

Définition 21 (Formes quadratiques définie, positives)

Soit Φ , une forme quadratique sur E .

On dit que Φ est :

- **définie** sur E si : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \Phi(x) \neq 0$;
- **positive** sur E si : $\forall x \in E, \quad \Phi(x) \geq 0$;
- **négative** sur E si : $\forall x \in E, \quad \Phi(x) \leq 0$.

Exercice 12



Les questions sont indépendantes

1. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce que la forme polaire $(A, B) \in E^2 \mapsto \text{Tr}(AB) \in \mathbb{R}$ est positive? négative? définie?
2. Justifier que toute forme quadratique définie est soit définie positive, soit définie négative.

ABdd2

En reprenant la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz page 7, on peut l'adapter avec ce nouveau vocabulaire :

Proposition 22 (Inégalité de Schwarz)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et Φ une forme quadratique positive sur E de forme polaire associée φ . On a

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\varphi(x, y))^2 \leq \Phi(x)\Phi(y).$$

Noter qu'on ne peut rien dire sur le cas d'égalité, la forme quadratique n'est pas supposée définie. Par contre, si on suppose que la forme quadratique est définie positive, on a égalité si et seulement si les vecteurs (x, y) sont liés.

2.2 Espaces préhilbertiens réels

Définition 23 (espaces préhilbertiens réels)

Un **espace préhilbertien réel** est la donnée :

- d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E ,
- d'un produit scalaire φ sur E , c'est-à-dire d'une forme bilinéaire définie positive sur E .

On note (E, φ) .

Exemple. On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-à-dire les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge. L'espace E est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire

$$\varphi : (u, v) \in E^2 \mapsto \varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

2.3 Orthogonalité en dimension infinie

Exercice 13. ♦♦♦ Orthogonal d'un hyperplan

AB61

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par : $\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$

Considérons le sous-ensemble A de E , constitué des applications qui s'annulent en 0 et le sous-ensemble B de E , constitué des applications dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle.

Préciser $A^\perp$ et $B^\perp$. A-t-on encore

$$A \oplus A^\perp = E \quad \text{et} \quad B \oplus B^\perp = E \quad ?$$

Proposition 24 (Supplémentaire orthogonal d'un s.e.v de dimension finie)

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel.

- Si** $\rightarrow F$ est de dimension finie de E ,
- alors** $\left| \begin{array}{l} \rightarrow F^\perp \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } E \text{ orthogonal à } F \text{ et c'est même le seul.} \\ \rightarrow (F^\perp)^\perp = F. \end{array} \right.$

Remarque. On l'appelle par conséquent **le supplémentaire orthogonal** de F dans E . Pour résumer, on écrit souvent les choses ainsi : $E = F \oplus F^\perp$.

3 Espaces préhilbertiens complexes

3.1 Formes sesquilineaires et hermitienne

Définition 25

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que φ est une **forme sesquilineaire** si :

- $\rightarrow$ L'application φ est semi-linéaire. C'est-à-dire linéaire par rapport à la première variable :
 $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y);$
- $\rightarrow$ L'application φ est linéaire par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire
 $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda \varphi(x, y_2).$

- De plus, une forme sesquilineaire est appelée **forme hermitienne** si elle vérifie en plus la propriété de symétrie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

Remarque. Les formes hermitiennes sont l'analogue pour les $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels des formes bilinéaires symétriques des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. En particulier, la condition de symétrie hermitienne permet d'imposer à $\varphi(x, x)$ d'être réel pour tout $x \in E$. En effet, on a alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$.

3.2 Espaces préhilbertiens complexes

Définition 26 (espace préhilbertien complexe)

Un **espace préhilbertien complexe** est la donnée :

- $\rightarrow$ d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E ,
- $\rightarrow$ d'une forme sesquilineaire hermitienne φ telle que

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0_E \Rightarrow \varphi(x, x) > 0.$$

Remarques. • On dit que la forme hermitienne φ est définie positive. On parle encore de produit scalaire dans ce contexte.

- On note alors $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.
- On a maintenant pour tous $x, y \in E$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\varphi(x, y)) + \|y\|^2.$$

Exercice 14



♦ Identité de polarisation

Prouver que dans un espace préhilbertien complexe :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2).$$

ABdd3

Exemple. Si E désigne les suites complexes de carrée sommable (c'est-à-dire, $u \in E$ si et seulement si $\sum |u_n|^2$ converge), alors l'application

$$(u, v) \in E^2 \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$$

est un espace préhilbertien complexe.

De nouveau, on peut énoncer une inégalité de Cauchy-Schwarz. L'énoncé est similaire, seule la preuve diffère véritablement.

Proposition 27 (inégalité de Cauchy-Schwarz (version hermitienne))

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Alors on a

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Remarque. On en déduit de nouveau l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un exemple à retenir : $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π -périodiques et continues. On vérifie alors qu'un produit scalaire est donné par :

$$\varphi : (f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

4

Projecteurs orthogonaux, distance à un s.e.v (rappel ECG2)

4.1

Projecteurs

On rappelle qu'une application p sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel est un projecteur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F, G de E tels que F et G soit supplémentaires et

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}, \quad p(x) = x_F.$$

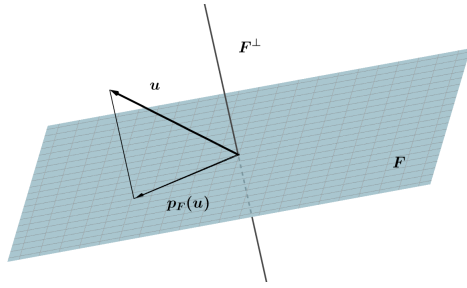
Définition 28 (projecteur orthogonal)

Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe).

On dit que p est une **projection orthogonale** sur F , notée p_F , si p projette sur F parallèlement à $F^\perp$.

Pour tout $u \in E$, $p_F(u)$ est appelé le **projeté orthogonal de u sur F** .

Remarque. La définition suppose que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E . C'est par exemple le cas si F est de dimension finie.



Retenons

$$v = p_F(u) \iff \begin{cases} v \in F \\ u - v \in F^\perp. \end{cases}$$

Exercice 15



◆ Exemple

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$. On définit l'application

$$p: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

1. Vérifier que p est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de p .
2. Est-ce que p est un projecteur orthogonal?

PO6

Remarque. Dans le cas où E est un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , p un endomorphisme et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$. On a l'équivalence entre :

- i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
- ii) La matrice A est symétrique et $A^2 = A$.

Proposition 29 (caractérisation d'un projecteur orthogonal par la norme)

Soient E un espace préhilbertien et p un projecteur sur E . On a l'équivalence entre :

- i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
- ii) Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

4.2 Expression et calcul explicite du projeté

Théorème 30 (expression du projeté si F est de dimension finie)

Soit F , un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et p_F , le projecteur orthogonal sur F .

Si $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F ,

alors $\forall u \in E, \quad p_F(u) = \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i.$

Exemples.

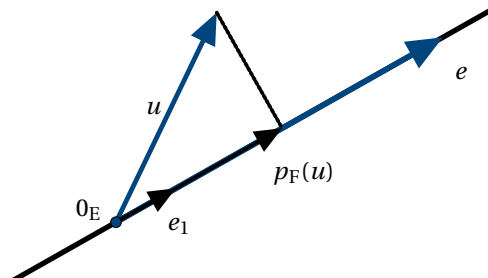
• Projection sur une droite vectorielle

Considérons le cas où F est une droite vectorielle. Il existe donc $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$F = \text{Vect}(e).$$

La famille constituée d'un unique vecteur $(e_1) = (e/\|e\|)$ est une base de F et d'après ce qui précède

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1 = \frac{\langle u, e \rangle}{\|e\|^2} e.$$



• Projection sur un hyperplan

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E . L'orthogonal $H^\perp$ est donc de dimension 1 et on peut considérer u_0 , un vecteur non nul unitaire de $H^\perp$ (u_0 est un vecteur normal à H).
Soit q le projecteur sur la droite vectorielle $\text{Vect}(u_0) = H^\perp$ orthogonal. D'après ce que précède

$$\forall u \in E, \quad q(u) = \langle u, u_0 \rangle u_0.$$

Or $p_H = \text{id}_E - q$ est le projecteur orthogonal sur H . Donc $\forall u \in E, \quad p_H(u) = u - \langle u, u_0 \rangle u_0$.

En pratique, pour le calcul du projeté, on évitera la formule de l'expression du projeté mais la méthode suivante qui ne nécessite pas le calcul en amont d'une base orthonormée.

Comment calculer un projeté?

Soient $u \in E$ et F , un sous-espace vectoriel de E . Calculons $p_F(u)$, le projeté orthogonal de u sur F .

- *Étape 1* : On trouve une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F (non nécessairement orthonormée).
- *Étape 2* : Comme $p_F(u) \in F$, il existe un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. On remarque ensuite que

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u - p_F(u), u_p \rangle = 0. \end{cases}$$

On explicite alors le système linéaire d'inconnues $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$

$$\begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \langle p_F(u), u_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \langle p_F(u), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_p \rangle = \langle p_F(u), u_p \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_p \rangle. \end{cases}$$

- *Étape 3* : On résout le système linéaire précédent à p équations pour trouver les p inconnues $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$.
On conclut par le calcul de $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.

Exercice 16



◆ Exemple

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ et $F = \mathbb{R}_1[x]$.
Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q(x) = 1 + x + x^2$ sur F .

PO7

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $u \in E$. On définit (sous réserve d'existence), la distance du vecteur u à F par

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

Notons que $u \in F$ si et seulement si $d(u, F) = 0$.

Théorème 31 (caractérisation du projeté par minimisation de la norme)

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F et $u \in E$. Alors la distance $d(u, F)$ est bien définie et

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\|.$$

De plus, le minimum est atteint seulement pour $v = p_F(u)$.

Remarques.

- Le projeté orthogonal de u sur F est caractérisé par : $\forall v \in F, \|u - v\| \geq \|u - p(u)\|$.

Autrement dit : pour tout $u \in E$, $v = p_F(u) \iff \left(v \in F \text{ et } \|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\| \right)$.

- Les vecteurs $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 = \|u\|^2 \quad \text{d'où} \quad d(u, F)^2 = \|u - p(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

Exercice 17



- ♦♦ Justifier que la quantité suivante est bien définie et la calculer.

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

PO9

4.4 Application : Inégalité de Bessel

Proposition 32 (Inégalité de Bessel)

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^n |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\star)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum |\langle e_i, x \rangle|^2$ et : $\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\star\star)$

Exercice 18



♦ Seconde preuve

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormée de E .

- Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

- En déduire l'inégalité de Bessel.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité ait lieu dans $(\star)$.

ABdd5



Exercices



Exercice 19. ♦ Soient E un espace vectoriel préhilbertien complexe et f un endomorphisme de E vérifiant :

ABdd7

$$\forall u \in E, \quad f(u) \perp u.$$

- Vérifier que tous vecteurs $u, v \in E$, on a $f(u)$ orthogonal à v .
 - En déduire que f est l'application nulle.
- On suppose maintenant que E est un espace euclidien. Soient $\mathcal{B}$, une base orthonormée de E et f un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique. Calculer $\langle f(u), u \rangle$ pour tout $u \in E$. Commenter.

Exercice 20. ♦♦ Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes tels que

ABdd8

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg P_n = n.$$

Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille P_n est orthonormée.

Exercice 21. ♦

ABdd9

- Justifier que l'application suivante définie bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{P(p)Q(p)}{2^p}.$$

- En déduire que l'ensemble $\left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} (p^2 - ap - b)^2 : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

Exercice 22. ♦♦♦ **Matrices de Gram et valeurs propres**

AB59

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On pose

$$G = \left(\langle u_i, u_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .

- Vérifier que $G = {}^t M M$.
- En déduire que $\ker(G) = \ker(M)$, puis $\text{rg}(G) = \text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
Indication. Considérer ${}^t X G X$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Vérifier que G est inversible si et seulement si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E .
- Justifier que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.
 - Justifier que les valeurs propres sont majorées par $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

Exercice 23. ♦♦♦ Soit $\omega : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application

AB64

$$\varphi_\omega : (f, g) \in \mathcal{C}^0([0; 1])^2 \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t) dt.$$

- On suppose dans un premier temps que ω est positive (pour tout $t \in [0; 1]$, $\omega(t) \geq 0$). Est-ce que φ_ω est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0; 1])$ si ω s'annule une fois? un nombre fini de fois? sur un intervalle $[a; b] \subset [0; 1]$ où $0 < a < b < 1$?
 - Est-ce que φ_ω peut-être un produit scalaire s'il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que $\omega(t_0) < 0$?
- Reprendre la question 1.a) en considérant l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ au lieu de $\mathcal{C}^0([0; 1])$.

Exercice 24. ♦♦♦ Peut-on trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout entier m ,

ABdd10

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^m = m \quad ?$$

Indication. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz!!