

CHAPITRE 17

Compléments sur les fonctions de plusieurs variables

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les résultats sur les fonctions de plusieurs variables du premier semestre. Le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et le lien avec l'algèbre bilinéaire permettra ainsi d'obtenir des conditions suffisantes à des extrema *locaux*. La notion de convexité de fin de chapitre complètera l'étude en donnant des conditions suffisantes pour avoir des extrema *globaux*. On étend aussi l'étude à des fonctions non nécessairement définies sur $\mathbb{R}^n$ mais sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

1

Rappels sur les fonctions d'une variable réelle

Comme les résultats sur les fonctions variables s'appuient et complètent les résultats de première année sur les fonction d'une variable, commençons par un rapide rappel. Dans la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Avec la continuité

Rappelons la définition de l'image d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, noté $f(I)$, comme l'ensemble des réels qui admettent un antécédent par f . Autrement dit,

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

THÉORÈME (RAPPEL)

image d'un segment

Pour toute application continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un segment de $\mathbb{R}$, l'image $f(I)$ est aussi un segment. Alors, f admet un minimum et un maximum et $f(I) = \left[\min_I f, \max_I f \right]$.

Remarque. On dit alors que f est bornée et atteint ses bornes. Il existe α, β tels que

$$\forall x \in I, \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Exercice 1



Les questions sont indépendantes

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose f continue et g bornée. Justifier que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont deux fonctions bornées.
2. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

p. 21

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(x) > 0.$$

Justifier : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall x \in [0; 1], \quad f(x) > \varepsilon.$

RA24

Avec la dérivée

THÉORÈME (RAPPEL)

condition nécessaire pour un extrema

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow f \text{ admet un extremum local en } a, \\ \rightarrow f \text{ est dérivable en } a, \text{ et} \\ \rightarrow a \text{ appartient à un intervalle ouvert inclus dans } I, \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad f'(a) = 0.$

Remarque. La réciproque est fautive : tout point critique ne donne pas un extremum. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.

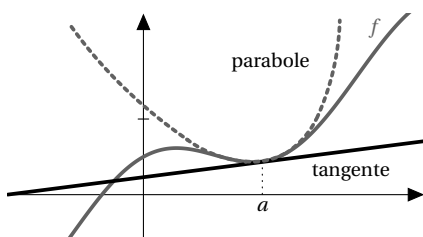
Avec les dérivées successives

THÉORÈME (RAPPEL)

formule de Taylor-Young

Soient $f \in \mathcal{C}^n(I)$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Au voisinage du réel a ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$



Exemples. • $n = 1$

équation de la tangente

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

• $n = 2$

équation d'une parabole si $f''(a) \neq 0$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + o_a((x-a)^2).$$

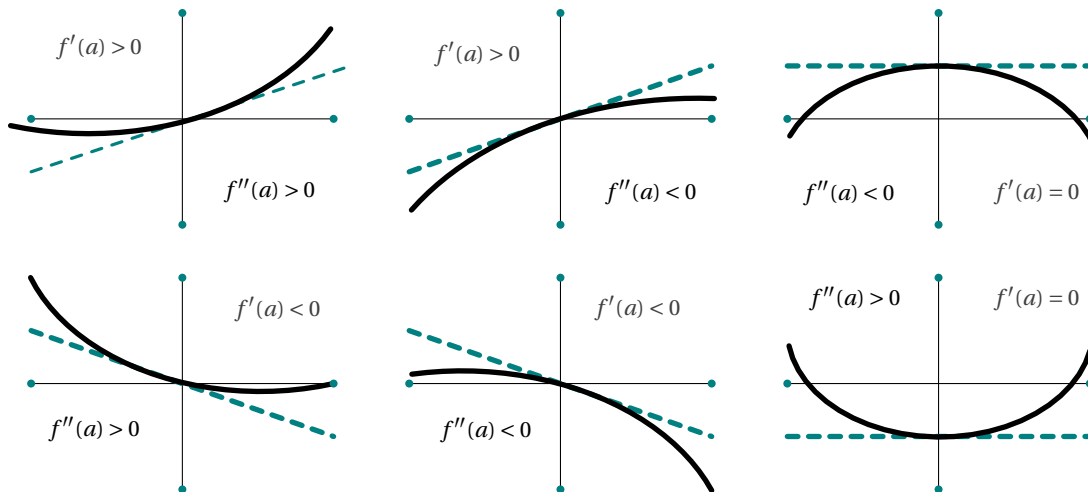
Allure du graphe d'une fonction au voisinage d'un point

En reprenant le cas $n = 2$, au voisinage de a , la courbe représentative de f est « proche » de la courbe d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2.$$

Lorsque $f''(a) \neq 0$, la courbe est une parabole.

Distinguons suivant le signe de $f'(a)$ et $f''(a)$. En gras, la parabole, en pointillés, la tangente.



Exercice 2



◆◆ Q Égalité de Taylor-Lagrange

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $a \in I$. Justifier que pour tout $x \in I$, il existe c compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(c).$$

p. 21

On pourra introduire la fonction φ définie sur I par $\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - (x-t)^2 \lambda / 2$ pour un réel λ choisi afin d'avoir $\varphi(a) = 0$.

RA25

Avec la convexité

THÉORÈME (RAPPEL)

condition suffisante pour un minimum global

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I .

- Si**
- f est convexe.
 - f est dérivable en a .
 - a est un point critique ($f'(a) = 0$).

Alors f admet un minimum global en a .

Remarque. On a un énoncé similaire dans le cas d'une fonction concave où on obtient un maximum global.

2

Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$

2.1 Fermés, ouverts et bornés

Dans la suite, on considère le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

DÉFINITION

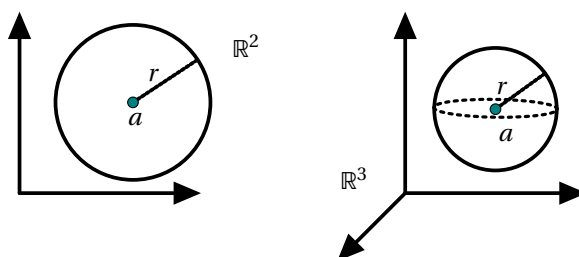
boule ouverte

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$, on définit la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par :

$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}.$$

C'est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ situés à une distance strictement inférieure à r du point a .

À gauche, une boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ et à droite dans $\mathbb{R}^3$. Il faut exclure dans les deux cas la « frontière ».



DÉFINITION

partie ouverte

Une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite **ouverte** si, en chaque point de $\mathcal{O}$, il existe une boule ouverte centrée en ce point et contenue dans $\mathcal{O}$. Autrement dit,

$$\forall a \in \mathcal{O}, \quad \exists r \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{O}.$$

Exemples.

- $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte puisqu'une boule ouverte en un point quelconque de $\mathbb{R}^n$ est toujours contenue dans $\mathbb{R}^n$.
- Toute boule ouverte est un ouvert.
- $\mathbb{R}^n$ privé d'un ensemble fini de points est ouvert.
- Soient $I_1, I_2, \dots, I_n, n$ intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. La partie $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ (on parle de pavé ouvert).

Remarques.

- Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection *finie* d'ouverts reste un ouvert. Par contre, cela devient faux pour une intersection infinie. Un contre-exemple est donné par $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{B}(a, 1/n) = \{a\}$.

DÉFINITION

partie fermée

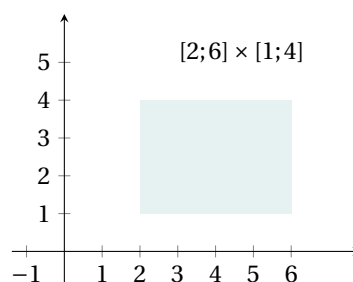
Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est dite **fermée** de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\bar{F}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarques.

- Il existe des parties ni ouvertes, ni fermées. Par exemple, $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$.
- L'ensemble vide est une partie ouverte puisque l'on ne peut pas trouver une seule boule ouverte centrée en un point de $\emptyset$ et, par suite, non contenue dans $\emptyset$. Par passage au complémentaire, $\mathbb{R}^n$ est aussi une partie fermée (et ouverte).

→ En reprenant la remarque précédente, et par passage au complémentaire, une union finie de parties fermées reste une partie fermée et une intersection quelconque de parties fermées est une partie fermée.

Exemple. On montre que si $I_1, I_2, \dots, I_n$ sont des intervalles fermés de $\mathbb{R}$. La partie $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.



PROPOSITION (ADMISE)

conditions suffisantes pour une partie ouverte/fermée

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$.

- La partie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < r\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- La partie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq r\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- La partie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = r\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exemples.

• Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on définit la partie de $\mathbb{R}^n$: $\overline{\mathcal{B}}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Nous avons vu que la norme $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|$ est une application continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x - a\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Comme $\overline{\mathcal{B}}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq r\}$, $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. On parle de **boule fermée** centrée en a et de rayon r .

• De même, la **sphère** : $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$ est une partie fermée.

DÉFINITION

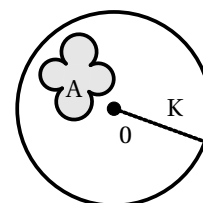
partie bornée

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

La partie A est dite **bornée** s'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq K$.

Remarque. Autrement dit, une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée si elle est incluse dans une boule de centre l'origine :

$$\exists K \in \mathbb{R}_*^+, \quad A \subset \mathcal{B}(0, K).$$



Exercice 3



Exemples

- ◆ 1. Parmi les parties suivantes, préciser les parties ouvertes, fermées, bornées.

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 5\}, \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \geq 0\}, \quad A_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = 0\} \quad \text{où } u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

p. 22

- ◆◆ 2. Justifier que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

On pourra exprimer le sous-espace comme intersection de parties du type A_4 .

CPV1

2.2 Rappels et compléments sur le cas $\mathcal{C}^1$

Les définitions vues au premier semestre s'étendent à une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ si les dérivées partielles existent sur $\mathcal{O}$ et sont continues en chaque point de $\mathcal{O}$. On rappelle que pour tout $a \in \mathcal{O}$, la fonction f admet en a un unique développement limité à l'ordre 1. C'est-à-dire, il existe $\varepsilon : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}^n$ avec $a + h \in \mathcal{O}$,

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla(f)(a), h \rangle + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

3

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

3.1 Définitions et exemples

DÉFINITION

dérivées partielles d'ordre 2

Soient un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{O}$ et $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On suppose que la dérivée partielle première $\partial_j f$ est définie sur $\mathcal{O}$. Si la dérivée partielle $\partial_i (\partial_j f)$ est définie en a , on dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (i, j) en a** et on note $\partial_{i,j}^2 f(a)$ pour $\partial_i (\partial_j f)(a)$.

Remarque. Si la dérivée partielle $a \in \mathcal{O} \mapsto \partial_i (\partial_j f)$ est définie sur $\mathcal{O}$, on dit que f admet, sur $\mathcal{O}$, une dérivée partielle d'ordre 2 d'ordre (i, j) et on note

$$\partial_{i,j}^2 f = \partial_i (\partial_j f).$$

On obtient alors une nouvelle fonction de plusieurs variables $\partial_{i,j}^2 f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$.

Exercice 4



✧ Calculer $\partial_{2,1}^2 f$ et $\partial_{1,1}^2 f + \partial_{2,2}^2 f + \partial_{3,3}^2 f$ dans les deux cas suivants :

I. $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - x_2 + x_1 + x_1 x_2$ **II.** $f : x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\} \mapsto 1/\|x\|$. p. 22

CPV2

DÉFINITION

fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Soient un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$:

- Si** | $\rightarrow$ La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2 d'indice (i, j) pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.
 $\rightarrow$ Les dérivées partielles d'ordre 2 sont des fonctions continues de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car les dérivées partielles d'ordre 2 existent et restent polynomiales (donc continues sur $\mathbb{R}^n$).

Remarque. Comme pour le cas $\mathcal{C}^1$, les combinaisons linéaires, les produits et quotients de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ ou encore la composition par une fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^2$ restent de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

DÉFINITION

la matrice hessienne

Soit $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.

La **matrice hessienne** de f au point $a \in \mathcal{O}$, notée $\nabla^2 f(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est définie par

$$\nabla^2 f(a) = \left[\partial_{i,j}^2 f(a) \right]_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} = \begin{bmatrix} \partial_{1,1}^2 f(a) & \partial_{1,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{1,n}^2 f(a) \\ \partial_{2,1}^2 f(a) & \partial_{2,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{2,n}^2 f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n,1}^2 f(a) & \partial_{n,2}^2 f(a) & \cdots & \partial_{n,n}^2 f(a) \end{bmatrix}.$$

Exemples.

- Matrice hessienne pour un polynôme à deux variables de degré 2.

Considérons la fonction polynomiale (de classe $\mathcal{C}^2$) définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$$

On vérifie que

$$\partial_1 f(x, y) = 2ax + cy + d, \quad \partial_2 f(x, y) = 2by + cx + e$$

puis

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 2a, \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = c, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = 2b, \quad \partial_{2,1}^2 f(x, y) = c.$$

Il vient :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{bmatrix}.$$

- Posons $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$. Si on note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on a : $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

La fonction g est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\partial_i g(x) = 2x_i \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \partial_{i,i}^2 g(x) = 2 \\ \partial_{i,j}^2 g(x) = 0 \quad \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \nabla^2 g(x) = 2I_n.$$

3.2 Le théorème de Schwarz

THÉORÈME (ADMIS)

de Schwarz

Soit f définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$,

alors pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et pour tout point $a \in \mathcal{O}$, on a $\partial_{j,i}^2 f(a) = \partial_{i,j}^2 f(a)$.

Remarque. D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est symétrique. En particulier, la matrice est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral).

Exercice 5



◆ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = xe^{x(y^2+z^2+1)}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le seul point critique a de f .
3. Former la hessienne de f au point a et vérifier qu'elle est diagonale.

p. 22

CPV3

3.3 Forme quadratique et développement limité d'ordre 2

Préliminaires

• Formes quadratiques

Rappelons que la forme quadratique associée à une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$q(h) = {}^t H A H$$

où H est la matrice des coordonnées de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

• Signe d'une forme quadratique

Nous avons vu aussi que le signe de la forme quadratique est précisé par le signe des valeurs propres de la matrice associée. Plus précisément

$$\text{i) } \forall u \in E, \quad q(u) \geq 0 \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+; \quad \text{ii) } \forall u \in E, \quad q(u) \leq 0 \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^-.$$

On a vu un énoncé plus précis encore connu sous le nom d'encadrement de Rayleigh

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \|h\|^2 \min \text{Sp}(A) \leq q(h) \leq \|h\|^2 \max \text{Sp}(A).$$

• Formes quadratiques et matrices hessiennes

Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On peut considérer la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f en a , notée $q_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et définie par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q_a(h) = {}^t H (\nabla^2 f(a)) H \quad \text{où} \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Cela s'écrit aussi :

$$q_a(h) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \partial_{i,j}^2 f(a) h_i h_j = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 f(a) h_i^2 + 2 \sum_{i < j} \partial_{i,j}^2 f(a) h_i h_j.$$

• Dérivées directionnelles à l'ordre 2

Soit $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que le segment $[a; a+h]$ soit inclus dans $\mathcal{O}$. On pose pour tout $t \in [0; 1]$,

$$g_{a,h}(t) = f(a + th).$$

En reprenant le résultat du premier semestre sur les dérivées directionnelles, $g_{a,h}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ avec pour tout $t \in [0; 1]$,

$$g'_{a,h}(t) = \langle \nabla f(a + th), h \rangle = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a + th) \quad \text{où } h = (h_1, \dots, h_n).$$

À l'aide de la seconde expression, on vérifie que $g_{a,h}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; 1]$ avec

$$g''_{a,h}(t) = q_{a+th}(h).$$

En particulier

$$g''_{a,h}(0) = q_a(h).$$

Preuve. Pour i fixé, posons

$$F_i : x \in \mathcal{O} \mapsto \partial_i f(x) \quad \text{et} \quad G_i : t \in [0; 1] \mapsto F_i(a + th).$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, F_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et par le théorème sur les dérivées directionnelles, $g'_{a,h}$ est dérivable et

$$G'_i(t) = \langle \nabla F_i(a + th), h \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(a + th) \cdot h_j = \sum_{j=1}^n h_j \partial_{ji}^2 f(a + th).$$

Par somme de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; 1], \quad g'_{a,h}(t) &= \sum_{i=1}^n h_i G_i(t). \\ g''_{a,h}(t) &= \sum_{i=1}^n h_i G'_i(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial_{ji}^2 f(a + th) = q_{a+th}(h). \end{aligned}$$

Ensuite, en reprenant le résultat de l'exercice 2, page 3, on prouve l'existence de $\theta \in [0; 1]$ tel que

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h).$$

Preuve. Il existe $\theta \in [0; 1]$ tel que

$$g_{a,h}(t) = g_{a,h}(0) + g'_{a,h}(0)t + \frac{1}{2} t^2 g''(\theta).$$

En remplaçant avec $t = 1$, il vient

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h).$$

Développement limité d'ordre 2

THÉORÈME

développement limité d'ordre 2

Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Alors pour tout $a \in \mathcal{O}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $0_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}^n$, une fonction $\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall h \in \mathcal{V}, \quad f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

où q_a est la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(a)$.

Preuve. Dans un premier temps, on pose $\mathcal{V} = \{h \in \mathbb{R}^n \mid a + h \in \mathcal{O}\}$. On définit ensuite la fonction ε par $\varepsilon(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$ et pour $h \in \mathcal{V} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|^2} \left(f(a + h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle - \frac{1}{2} q_a(h) \right).$$

Justifions la continuité de ε en $0_{\mathbb{R}^n}$. Pour $h \in \mathcal{V} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, l'énoncé précédent prouve l'existence de $\theta \in [0; 1]$ tel que

$$|\varepsilon(h)| = \frac{1}{2\|h\|^2} |q_{a+\theta h}(h) - q_a(h)|.$$

En revenant à l'expression de la forme quadratique à l'aide des dérivées partielles, on obtient

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon(h)| &= \frac{1}{2\|h\|^2} \left| \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} h_i h_j \left(\partial_{i,j}^2 f(a + \theta h) - \partial_{i,j}^2 f(a) \right) \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\|h\|^2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} \left| h_i h_j \left(\partial_{i,j}^2 f(a + \theta h) - \partial_{i,j}^2 f(a) \right) \right| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
 |\varepsilon(h)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} \left| \partial_{i,j}^2 f(a + \theta h) - \partial_{i,j}^2 f(a) \right| \quad \text{car pour tout indice } i, |h_i| \leq \|h\|.
 \end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}$, le terme de droite tend vers 0 (les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues et $\theta \in [0; 1]$). Ainsi $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et l'énoncé est prouvé. ■

Exemple. Posons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy + xe^y$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\begin{aligned}
 \partial_1 f(x, y) &= y + e^y, & \partial_2 f(x, y) &= x + xe^y \\
 \partial_{1,1}^2 f(x, y) &= 0, & \partial_{1,2}^2 f(x, y) &= \partial_{2,1}^2 f(x, y) = 1 + e^y, & \partial_{2,2}^2 f(x, y) &= xe^y.
 \end{aligned}$$

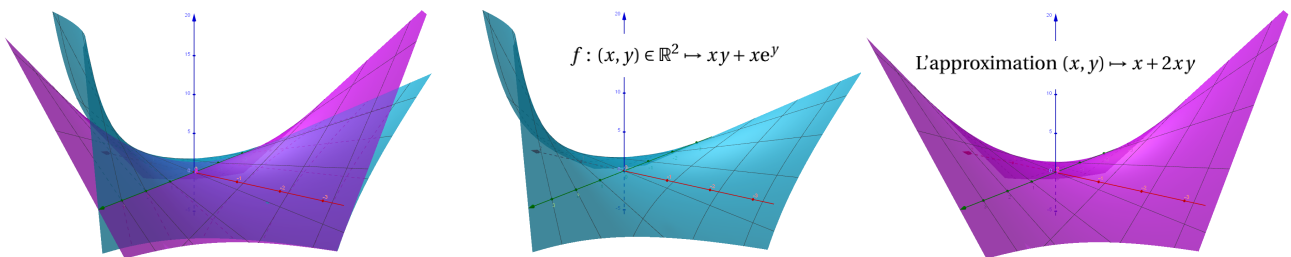
La matrice hessienne est alors :

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 + e^y \\ 1 + e^y & xe^y \end{bmatrix}.$$

En particulier $\nabla f^2(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q_{(0,0)}(h) = 4h_1 h_2$.

Le développement limité d'ordre 2 devient

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(0, 0) + \langle \nabla f(0, 0), h \rangle + \frac{1}{2} q_{(0,0)}(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\
 &= 0 + \langle (1, 0), (h_1, h_2) \rangle + \frac{1}{2} \cdot 4h_1 h_2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) = h_1 + 2h_1 h_2 + \|h\|^2 \varepsilon(h).
 \end{aligned}$$



4

Applications à l'optimisation

4.1

Rappels : extrema locaux/globaux

DÉFINITION

extrema locaux

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

→ On dit que f a un **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\|x - a\| < r \Rightarrow f(a) \geq f(x) \right).$$

→ On dit que f a un **minimum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\|x - a\| < r \Rightarrow f(a) \leq f(x) \right).$$

→ On dit que f a un **extremum local** si f a un maximum local ou un minimum local.

4.2 Condition d'existence d'extremum

L'énoncé suivant généralise le théorème d'existence du minimum et du maximum pour une fonction continue sur un segment.

THÉORÈME (ADMIS)

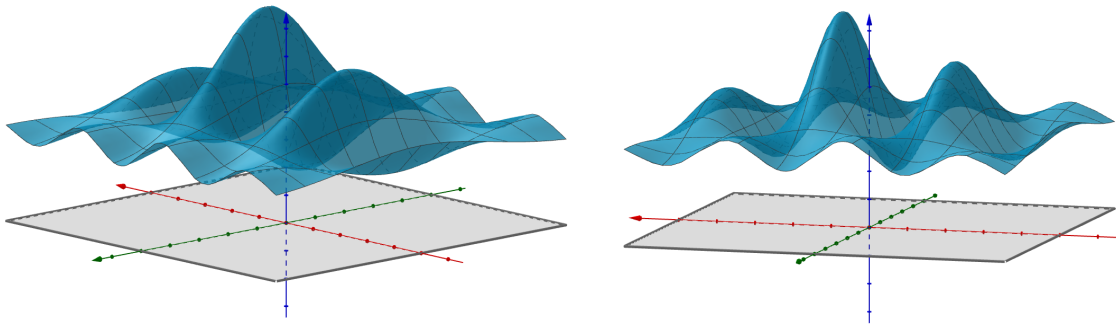
sur un fermé borné

Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global.

Remarque. On peut traduire mathématiquement. Soit $f : \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{F}, \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Ci-dessous, un exemple d'une fonction continue de deux variables définies sur un fermé borné. On vérifie que la fonction est bien bornée et atteint ses bornes.



4.3 Condition nécessaire d'ordre 1

L'énoncé du premier semestre s'étend au cas d'un ouvert en reprenant la preuve.

THÉORÈME

condition d'ordre 1

Soient $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ et $a \in \mathcal{O}$.

- Si** | → La partie $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
→ La fonction f a un extremum local en $a \in \mathbb{R}^n$.

Alors a est un point critique de f , c'est-à-dire $\nabla f(a) = 0$.

 **Attention.** Comme pour le cas d'une variable :

- L'énoncé précédent n'est valable que sur un ouvert.
- La réciproque est fausse. On parle alors de **point col** ou **point selle**.

Exercice 6



Exemple

1. Donner le domaine de définition de f définie par $f(x, y) = x^{\ln(x)} + y^{\ln(y)}$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser les dérivées partielles.
3. Montrer que f a, au plus, un extremum. Est-ce un minimum, un maximum?

p. 23

CPV4

4.4 Condition suffisante d'ordre 2

THÉORÈME

condition d'ordre 2

Si a est un point critique de f :

- Si $\text{Sp}(\nabla^2 f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, **alors** f admet un minimum local en a .
- Si $\text{Sp}(\nabla^2 f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, **alors** f admet un maximum local en a .
- Si $\text{Sp}(\nabla^2 f(a))$ contient deux réels non nuls de signes distincts, **alors** f n'admet pas d'extremum en a .

Preuve. • Traitons le premier cas. Reprenons le développement limité d'ordre 2. Pour $h \in \mathcal{V}$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

Or a est un point critique :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

En utilisant l'encadrement de Rayleigh avec $\alpha = \min \text{Sp}(\nabla^2 f(a)) > 0$, il vient

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \alpha \|h\|^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h) \geq \|h\|^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon(h) \right).$$

Comme $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{V}$ et

$$\forall h \in \mathcal{B}(0; r), \quad |\varepsilon(h)| \leq \frac{\alpha}{4}.$$

Dans ce cas

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{\|h\|^2 \alpha}{4} \geq 0.$$

Il y a un minimum local.

- Le second point se déduit du premier en considérant $-f$.
- Soient u, v deux vecteurs propres respectivement de $\lambda > 0$ et $\mu < 0$. On vérifie que

$$q_a(u) = \lambda \|u\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad q_a(v) = \mu \|v\|^2 < 0.$$

On peut supposer que $u, v \in \mathcal{V}$ (quitte à diminuer la norme). On a vu que la fonction d'une variable $g_{a,u}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; 1]$, la formule de Taylor-Young donne alors pour tout $t \in [0; 1]$

$$g_{a,u}(t) = g_{a,u}(0) + g_{a,u}'(0) \cdot t + g_{a,u}''(0) \cdot \frac{t^2}{2} + o_0(t).$$

D'où en remplaçant (avec a , point critique)

$$f(a+tu) - f(a) = \underbrace{q_a(u)}_{>0} \cdot \frac{t^2}{2} + o_0(t).$$

Ainsi pour t suffisamment petit $f(a+tu) - f(a) > 0$.

De la même manière, on montre que pour t suffisamment petit $f(a+tv) - f(a) < 0$. Il n'y a donc pas d'extremum local en a . ■

Remarque. Les réciproques sont fausses. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4$ admet bien un minimum au point $(0, 0)$, pourtant la matrice hessienne est nulle en $(0, 0)$ et le spectre est réduit à $\{0\}$ qui n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

! Attention. La seule connaissance de la matrice hessienne au point a ne permet pas de justifier que l'extremum est global.

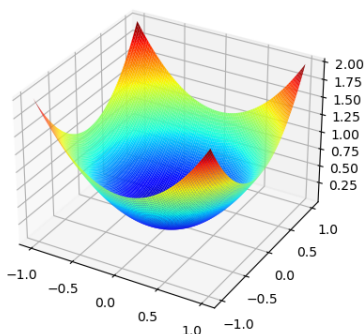
Illustration dans $\mathbb{R}^2$

Posons pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f_{\alpha, \beta}(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$. La matrice Hessienne en point critique $(0, 0)$ est

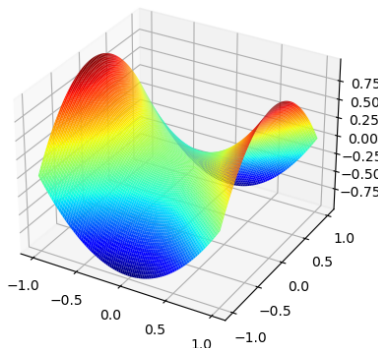
$$H_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}.$$

Trois cas sont bien à distinguer :

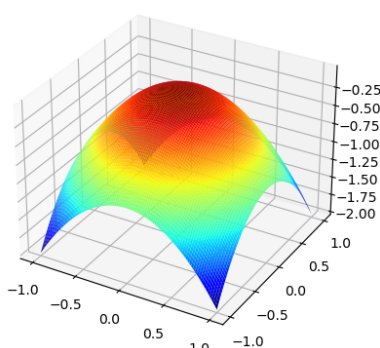
I. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$,



II. α, β de signes opposés,



III. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_-^*$.



Exemples

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

Justifions que la fonction f admet un minimum local en $(1, 1)$. Commençons par tracer les courbes de niveaux :

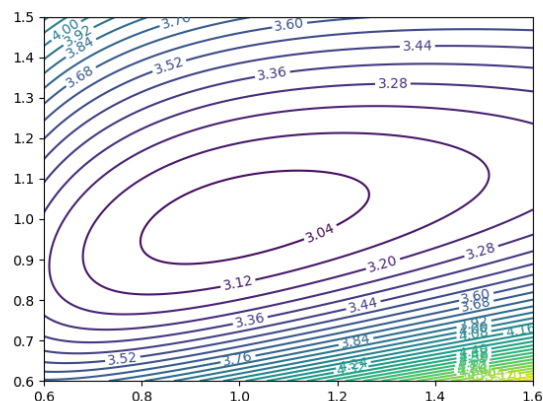
Editeur

```
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,y):
    return x/y**2+y**2+1/x

x=np.linspace(0.4,1.6,200)
y=np.linspace(0.5,1.5,200)
X , Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)

graphe = plt.contour(X,Y,Z,20)
# Le 20 pour 20 lignes de niveau
plt.show()
```



On vérifie que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Les dérivées partielles premières sont données par

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$$

et les dérivées d'ordre 2 par

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial_{2,1}^2 f(x, y) = \partial_{1,2}^2 f(x, y) = -\frac{2}{y^3}, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = \frac{6x}{y^4} + 2.$$

De plus, on vérifie qu'on a un unique point critique donné par $a = (1, 1)$. Enfin, la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

On trouve deux valeurs propres strictement positives. On a un minimum local.

Exercice 7



♦ Soit f la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \left((\ln x)^2 + 2y^2 \right).$$

p. 23

1. Démontrer qu'il existe dans $\mathcal{O}$ un unique point col pour f .
2. Est-ce que f admet un maximum global? un minimum global?

CPV5

• Complétons l'étude de la dimension 2 avec *les notations de Monge* (hors programme).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$. Pour $a \in \mathbb{R}^2$, on notera H_a la matrice hessienne de l'application au point a .

$$H_a = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}.$$

Exercice 8



♦♦  Supposons que $a \in \mathcal{O}$ est un point critique de f . Justifier que

- si $rt - s^2 < 0$, alors $f(a)$ est un point col.
- si $rt - s^2 > 0$, alors $f(a)$ est un extremum local. Dans ce cas, si $r < 0$, alors $f(a)$ est un maximum local et, si $r > 0$, alors $f(a)$ est un minimum local.

p. 24

CPV6

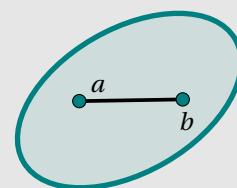
4.5 Convexité, condition suffisante d'extremum global

DÉFINITION

Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est dite **convexe** si, pour tout couple (a, b) d'éléments de C , le segment $[a, b]$ est tout entier inclus dans C . Autrement dit, C est convexe lorsque

$$\forall a, b \in C, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda a + (1 - \lambda)b \in C.$$

partie convexe



Exemples. $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ sont des parties convexes. Si $(I_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ désignent des intervalles de $\mathbb{R}$, alors $I_1 \times \dots \times I_n$ est une partie convexe.

THÉORÈME

convexité, extremum global

Soient $\mathcal{O}$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et a , un point critique de f .

- Si pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\text{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}^+$, alors f admet un minimum global en a .
- Si pour tout $x \in \mathcal{O}$, $\text{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}^-$, alors f admet un maximum global en a .

Exercice 9



◆◆ Preuve

On conserve les mêmes notations et hypothèses. À l'aide des résultats préliminaires sur la fonction $g_{a,h}$ et d'une formule de Taylor, justifier que

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 (t-u) q_{a+uh}(h) du.$$

p. 24

Conclure sur le théorème.

CPV7

Exemple. Soit $f(x, y, z) = 11x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 10xy + 10xz - 6yz + 1$.

→ La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et on vérifie que la matrice hessienne en (x, y, z) est

$$\nabla^2 f(x, y, z) = 2 \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

→ Utilisons Python pour obtenir rapidement le spectre :

Editeur

```
import numpy as np
H= 2*np.array
    ([[11,-5,5],[-5,3,-3],[5,-3,3]])
Sp=np.linalg.eigvals(H)
```

Console

```
>>> # script executed
>>> Sp
array([32.,  2.,  0.] )
```

→ On vérifie que f admet un point critique donné par $a = (0, 1, 1)$.

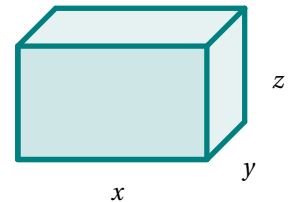
→ Concluons : en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice hessienne a un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$. On peut donc en déduire que f admet en a un minimum global.

4.6 Exemple détaillé sur un ouvert

Modélisation

On souhaite minimiser la surface d'un pavé de volume 1. Notons x, y, z les longueurs des cotés. L'aire de la surface a pour expression $2(xy + xz + yz)$. Le volume vaut $xyz = 1$ et $z = 1/(xy)$. Finalement, on cherche à minimiser sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}_*^{+2}$, la fonction f définie par

$$f(x, y) = xy + xz + yz = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$



Précisons que f n'admet pas de maximum global puisque : $f(x, 1) = x + \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Les dérivées partielles

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$ en tant que fraction rationnelle qui ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$

$$\partial_1 f(x, y) = y - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = x - \frac{1}{y^2}.$$

Noter que la symétrie (pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(y, x)$) impose $\partial_1 f(x, y) = \partial_2 f(y, x)$. On a aussi $\partial_{1,1} f(x, y) = \frac{2}{x^3}$. Par symétrie $\partial_{2,2} f(x, y) = \frac{2}{y^3}$. Puis $\partial_{1,2} f(x, y) = 1$ et par le théorème de Schwarz $\partial_{2,1} f(x, y) = 1$. La matrice hessienne est

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2/y^3 \end{bmatrix}.$$

Étude du ou des points critiques

Soit $(x, y) \in \mathcal{O}$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 1/x^2 = 0 \\ x - 1/y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x = 1/y^2 = x^4 \end{cases}$$

Comme $x > 0$, la seconde ligne impose $x = 1$. Puis, $y = 1$. On a un point critique $(1, 1)$ avec $f(1, 1) = 3$.

Étude locale au niveau du point critique

La matrice hessienne au point critique est

$$\nabla^2 f(a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\nabla^2 f(1, 1)$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable (dans une base orthonormée). Précisons les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 en remarquant que

$$\nabla^2 f(1, 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\nabla^2 f(1, 1)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4, \quad \text{puis,} \quad \lambda_1 = 1.$$

D'où $\text{Sp}(\nabla^2 f(1, 1)) = \{1; 3\} \subset \mathbb{R}_*^+$. Finalement, $3 = f(1, 1)$ est un minimum local.

Étude globale

La fonction f est positive donc minorée. D'après le théorème de la borne inférieure, on peut poser $\alpha = \inf_{(x, y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2} f(x, y)$.

Posons maintenant la partie de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{K} = \left[\frac{1}{\alpha+1}; (\alpha+1)^2 \right] \times \left[\frac{1}{\alpha+1}; (\alpha+1)^2 \right].$$

- Soit $(x, y) \notin \mathcal{K}$. Plusieurs cas sont possibles :

→ Si $x < \frac{1}{\alpha+1}$, alors

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \geq \frac{1}{x} \geq \alpha + 1.$$

→ Si $y < \frac{1}{\alpha+1}$, on a de même $f(x, y) \geq \alpha + 1$.

→ Si les deux cas précédents ne sont pas vérifiés, on a

$$\left(x \geq (\alpha+1)^2 \text{ et } y \geq \frac{1}{\alpha+1} \right) \quad \text{ou} \quad \left(x \geq \frac{1}{\alpha+1} \text{ et } y \geq (\alpha+1)^2 \right)$$

Ainsi
$$f(x, y) \geq xy \geq (\alpha+1)^2 \cdot \frac{1}{\alpha+1} \geq \alpha + 1.$$

Dans tous les cas : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \setminus \mathcal{K}, \quad f(x, y) \geq \alpha + 1$

- $\mathcal{K}$ est un fermé borné et f est continue sur $\mathcal{K}$, il existe donc un minimum atteint en un certain point $a \in \mathcal{K}$:

$$\forall (x, y) \in \mathcal{K}, \quad f(x, y) \geq f(a).$$

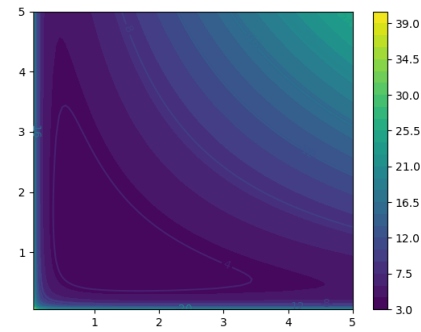
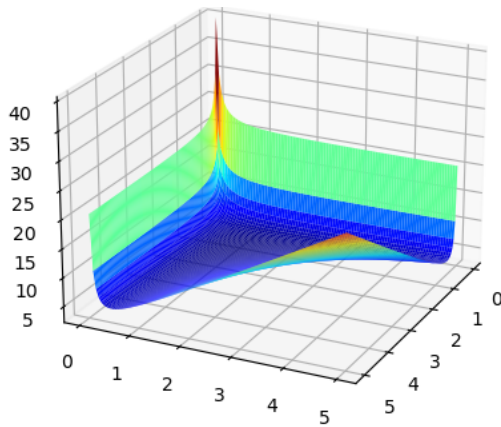
Précisons que $f(a) \leq \alpha + 1$ car sinon, on aurait pour tout $(x, y) \in \mathcal{O}$, $f(x, y) \geq \alpha + 1$. En contradiction avec la définition de $\mathcal{K}$.

- Résumons :

→ Pour tout $(x, y) \in \mathcal{K}$, $f(x, y) \geq f(a)$.

→ Pour tout $(x, y) \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{K}$, $f(x, y) > \alpha + 1 \geq f(a)$.

Concluons : $f(a)$ est un minimum global. Résultat que l'on peut vérifier avec Python.



Astuce par une inégalité de convexité

À l'aide de la concavité du logarithme, on prouve l'inégalité arithmético-géométrique¹ :

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Soit $(x, y) \in \mathcal{O}$. Pour $n = 3$, $a_1 = 1/x$, $a_2 = 1/y$ et $a_3 = xy$

$$\frac{1}{3}(1/x + 1/y + xy) \geq \sqrt[3]{xy \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \quad \text{d'où} \quad f(x, y) \geq 3 = f(a).$$

Remarque. Mythe fondation de Carthage.



Sacchi, Andrea, la mort de Didon, 17ème

1. Voir la question 4 du problème ??, p. ?? pour une preuve.



Exercices



Exercice 10. ✧

CPV15

- Préciser l'ensemble de définition de f définie par $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.
 - Est-ce un ouvert, un fermé, ni l'un ni l'autre?
- Préciser les lignes de niveau de f .

>> Solution p. 24

Exercice 11. ✧

VPV8

- Justifier que l'équation $x - \ln(x) = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$ a deux solutions α, β avec $\alpha \in]0; 1[$ et $\beta \in [2; 4]$.
- On considère maintenant la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{O} =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
- Montrer que la fonction f admet exactement deux points critiques : $A = (\alpha, \ln(\alpha))$ et $B = (\beta, \ln(\beta))$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter $\det(\nabla^2 f(a) - \lambda)$. En déduire la nature du point critique A.
- Même question pour B.

>> Solution p. 24

Exercice 12. ♦♦ On définit la partie $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 8\}$ et la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par :

CPV9

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

- Déterminer les points critiques de f .
- Justifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)$.
 -  En déduire que si $(x, y) \notin \mathcal{B}$, alors $f(x, y) \geq 0$.
 - Justifier que f admet un minimum m_0 sur $\mathcal{B}$. Préciser sa valeur.
- En déduire que m_0 est un minimum global de f .

>> Solution p. 25

Exercice 13. ♦♦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par

CPV10

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et préciser les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^n$.
- Déterminer le seul point critique $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.
 - Vérifier que la hessienne de f en ce point s'écrit sous la forme $H = 2(I_n + J)$ où J désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
 - Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de J . Que dire sur les valeurs propres de J ?
 - En déduire que $f(a)$ est un minimum local de f .
-  Est-ce que $f(a)$ est un minimum global?

>> Solution p. 26

Exercice 14. ♦♦ Problème des moindres carrés

CPV11

Soient $x = (x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$, $y = (y_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$. On définit les moyennes empiriques et variance empirique par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

On suppose $\sigma_x \sigma_y \neq 0$ et on définit aussi la covariance et le coefficient de corrélation empiriques de x et y par :

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \rho(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad F(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

- Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et préciser les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, puis vérifier que la matrice hessienne de F peut s'exprimer sous la forme :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 F(a, b) = \frac{2}{n} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 + \bar{x}^2 & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{bmatrix}.$$

- Justifier que F admet un unique point critique $(\hat{a}, \hat{b})$ que l'on exprimera en fonction de $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x^2$ et $\text{Cov}(x, y)$.
 - Vérifier que $F(\hat{a}, \hat{b}) = n\sigma_y^2(1 - \rho^2(x, y))$.
- Montrer que $F(\hat{a}, \hat{b})$ correspond à un minimum global de F .
- Montrer que l'on a : $|\rho(x, y)| \leq 1$. Que dire de x et y lors du cas d'égalité $|\rho(x, y)| = 1$?

>> Solution p. 26

Exercice 15. ♦♦♦ ♦ Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\mathcal{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ la boule unité ouverte :

CPV12

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}.$$

On suppose que f est constante sur $\mathcal{S}$. Démontrer l'existence de $a \in \mathcal{B}$ tel que $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

>> Solution p. 27

Exercice 16. ♦♦♦ ♦ **Existence d'une valeur propre pour une matrice symétrique et quotient de Rayleigh**

CPV13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On identifie dans la suite, vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$R_S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\langle Sx, x \rangle}{\|x\|^2}. \end{cases}$$

- Justifier que la restriction de R_S à $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ admet un minimum et un maximum.
 - En remarquant que, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$, $R_S(x) = R_S(\alpha x)$, montrer que l'application R_S admet un minimum et un maximum global sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.
- On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $D(x) = \|x\|^2$ et $N(x) = \langle Sx, x \rangle$.
 - Vérifier que D et N sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\partial_1 D(x) = 2 \langle x, e_1 \rangle \quad \text{et} \quad \partial_1 N(x) = 2 \langle Sx, e_1 \rangle.$$

- En déduire que R_S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et que le gradient en x est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \quad \nabla R_S(x) = \frac{2}{\|x\|^2} (R_S(x) - Sx).$$

- Soit x_0 un point où le maximum de R_S est atteint. Montrer que x_0 est vecteur propre de S .

>> Solution p. 27

Problème 17. ♦ ♦ **Dérivation d'une intégrale à paramètre**

CPV14

On considère les fonctions f , définie sur $\mathcal{F} = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et g , définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x, t) = e^{-t^2} \sqrt{1 + xt} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

- Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$ est convergente.
 - En déduire que la fonction g est bien définie sur $[0; +\infty[$.
 - Justifier que g est croissante sur $[0, +\infty[$.
- Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{F}$ et préciser $\partial_1 f(x, t)$ et $\partial_{1,1}^2 f(x, t)$.

b) Montrer que pour tout $(x, t) \in \mathcal{F}$,

$$\left| \partial_{1,1}^2 f(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

c)  Soit $x_0 \in [0; +\infty[$, montrer que, pour $(x, t) \in \mathcal{F}$

$$\left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \partial_1 f(x_0, t) \right| \leq \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2.$$

d) En déduire l'existence d'une constante $C \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x_0 \in [0; +\infty[$,

$$\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) dt \right| \leq C |x - x_0|^2.$$

e) Conclure en montrant que g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que g' est définie par

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x, t) dt.$$

f) Retrouver le sens de variation de g .

>> Solution p. 28

Exercice 18. ♦♦

EML Lyon 2007 # CPV16

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. On définit les fonctions $F : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x, y) = F(xy) - F(x) - F(y).$$

- a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[^2$, puis exprimer, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x, y) en fonction de $x, y, f(x), f(y), f(xy), f'(x), f'(y), f'(xy)$.
- b) Établir que G admet $(1, 1)$ comme unique point critique.
- c) Est-ce que G admet un extremum local?

>> Solution p. 29

Exercice 19. ♦ Soit f la fonction définie par :

Oraux HEC 2008 # CPV17

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. La fonction f a-t-elle des extrema locaux? globaux?

>> Solution p. 30

Problème 20. ♦♦  Soient l'ouvert $\mathcal{O} = (\mathbb{R}_+^*)^n$ et la fonction f définie sur $\mathcal{O}$ par

CPV18

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$. Préciser les dérivées partielles d'ordre 1.
2.  Déterminer les points critiques de f et donner la valeur de f en ces points.
3. a) Montrer que si a est un point critique de f alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que :

$$\nabla^2 f(a) = \alpha(nI_n - J)$$

où J la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

b) Déterminer les valeurs propres de $nI - J$. Peut-on en déduire la nature des points critiques de f ?

L'objectif de la suite est de prouver que f admet un minimum global au point critique en utilisant des inégalités plus ou moins classiques.

4. Première méthode : inégalité de Cauchy-Schwarz

Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Conclure.

5. Deuxième méthode : inégalité arithmético-géométrique

On démontre que pour une fonction convexe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n, \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k).$$

a) À partir de la fonction logarithme, montrer que

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_*^+, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

b)  Conclure sur la nature du point critique.

6. Troisième méthode : inégalité de Tchebychev pour les sommes

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. En étudiant le signe de la somme double $\sum_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$, montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right).$$

b)  Conclure.

>> Solution p. 30

Table des matières

17 Compléments sur les fonctions de plusieurs variables	1
1 Rappels sur les fonctions d'une variable réelle	1
2 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$	3
2.1 Fermés, ouverts et bornés	3
2.2 Rappels et compléments sur le cas $\mathcal{C}^1$	5
3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$	5
3.1 Définitions et exemples	5
3.2 Le théorème de Schwarz	7
3.3 Forme quadratique et développement limité d'ordre 2	7
4 Applications à l'optimisation	9
4.1 Rappels : extrema locaux/globaux	9
4.2 Condition d'existence d'extremum	10
4.3 Condition nécessaire d'ordre 1	10
4.4 Condition suffisante d'ordre 2	11
4.5 Convexité, condition suffisante d'extremum global	13
4.6 Exemple détaillé sur un ouvert	14