

Nom :

Mathématiques

Cours

double-diplôme
ESCP x CentraleSupélec

Livret II

Chapitre

2. Compléments en analyse

2026

Compléments en analyse

Entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.

Paul Painlevé (1863-1933)

1

Analyse pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

1.1 Limites et continuité

- Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, a un point adhérent à I dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Soient $f_r = \Re(f)$, $f_i = \Im(f)$, $\ell_r = \Re(\ell)$ et $\ell_i = \Im(\ell)$. On dit que la fonction complexe f admet **une limite** ℓ en a si, et seulement si, les fonctions réelles f_r et f_i admettent des limites en a et

$$\lim_a f_r = \ell_r \quad \text{et} \quad \lim_a f_i = \ell_i.$$

- Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à I . On dit que la fonction complexe f est **continue** en $a \in I$ (resp. sur I) si, et seulement si les fonctions réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

1.2 Dérivation

Définition 1 (Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$)

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est **dérivable** en x_0 si l'expression $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque le réel h tend vers 0, c'est-à-dire s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Dans ce cas, on définit la dérivée de f en x_0 par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Généralisation. En itérant le procédé, on peut définir les fonctions à valeurs complexes dérivables n fois.

Proposition 2 (Lien avec la partie imaginaire et réelle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, et définissons les fonctions f_r et f_i de I dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall x \in I, \quad f_r(x) = \Re(f(x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \Im(f(x)).$$

Alors on en l'équivalence entre :

- i) La fonction complexe f est dérivable en x_0 ;
- ii) Les fonctions réelles f_r et f_i le sont en x_0 .

Dans ce cas,

$$f'(x_0) = f_r'(x_0) + i f_i'(x_0).$$

Remarque. Les règles de calculs sur les dérivées complexes sont identiques au cas réel : Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivables en $x_0 \in I$. Alors :

- La fonction somme $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$;
- La fonction produit fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Exemple. Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Alors e^f est dérivable et

$$\boxed{(e^f)' = f' e^f} \quad (\star)$$

Remarque. La question des variations de f à valeurs complexes n'a plus grand sens car l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

Théorème 3 (Inégalité d'accroissements finis - cas complexe)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$.

Si la fonction $|f'|$ est majorée par M sur $]a, b[$,

alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Remarque. On peut donner un cas particulier fréquent : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f' est bornée, et

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{[a, b]} |f'| (b - a).$$

Corollaire 4 (Cas constant)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable, I étant un intervalle. Alors f est constante si, et seulement si, $f' = 0$.

1.3 Intégration

Définition 5 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f = f_r + i f_i$, la décomposition algébrique d'une fonction complexe f . Soient $a, b \in I$. On dit que la fonction f est **intégrable** si et seulement si f_r et f_i le sont, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_r(t) dt + i \int_a^b f_i(t) dt.$$

Exemple. $\int_0^\pi e^{it} dt = \int_0^\pi \cos(t) dt + i \int_0^\pi \sin(t) dt = [\sin(t)]_0^\pi + i[-\cos(t)]_0^\pi = 2i.$

On montre que l'ensemble des fonctions intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel, et que l'intégrale est une forme linéaire. On vérifie également la relation de Chasles, ainsi que l'intégrabilité d'un produit de fonctions intégrables en décomposant les fonctions sous forme algébrique. Le théorème fondamental reste vrai dans le cas complexe. De même avec les formule de Taylor avec reste intégrale.

Proposition 6 (Inégalité triangulaire intégrale dans $\mathbb{C}$)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors $|f|$ est aussi intégrable, et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

2

Passage dans $\mathbb{C}$ pour des problèmes bien réels

Les parties de cette section sont indépendantes. On recense ici plusieurs problèmes de calculs où le passage dans le domaine complexe permet d'avoir le résultat plus directement.

2.1 Calculs de somme

Exercice 1



♦ Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kt), \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kt)^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \cos(kt).$$

2. Déterminer les solutions réelles x de $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) = 0$.

ceAnC2

2.2 Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Pour rappel, une suite u est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n. \quad (\bullet)$$

À une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $(\bullet)$, on associe l'équation dite **caractéristique**

$$x^2 = \alpha x + \beta \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

Théorème 7 (Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2 - $\Delta < 0$.)

Si $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$ et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) r^n.$$

2.3 Calculs d'intégrales

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_*^+$. Il arrive souvent (en physique notamment) que l'on souhaite calculer une intégrale dont l'intégrande est du type :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad g : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t).$$

L'idée est alors de travailler $\mathbb{C}$ en remarquant que pour t réel, on a

$$e^{\alpha t} \cos(\omega t) = e^{\alpha t} \Re(e^{i\omega t}) = \Re(e^{(\alpha+i\omega)t}) \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} \sin(\omega t) = e^{\alpha t} \Im(e^{i\omega t}) = \Im(e^{(\alpha+i\omega)t}).$$

Or, $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}$ est une primitive de $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ d t sur $\mathbb{R}$. On peut alors calculer

$$\begin{cases} F(t) := \Re\left(\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}\right) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)). \\ G(t) := \Im\left(\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}\right) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \end{cases}$$

puisque

$$\frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha-i\omega}{(\alpha+i\omega)(\alpha-i\omega)} = \frac{\alpha-i\omega}{|\alpha+i\omega|^2} = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

La fonction F est une primitive de f et la fonction G est une primitive de g .

Exercice 2



♦ Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos(x)^2 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} x^2 e^x \cos(x) dx.$$

- Le cas particulier d'intégrale comportant des termes du type $\cos^p$ et $\sin^p$: peuvent être traités en utilisant les formules d'Euler.

ceAnC3

Exercice 3



♦ Exemple

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3$ en fonction de $\sin(\theta)$, $\sin(3\theta)$ et $\sin(5\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \sin(t)^3 dt$.

ceAnC4

3

Introduction aux séries entières

3.1

Précisions sur les séries numériques complexe

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On dit que la série $\sum a_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Cela équivaut à dire que les séries réelles $\sum \Re(a_n)$ et $\sum \Im(a_n)$ convergent. De plus dans le cas convergent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Re(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

- Certains résultats vus pour les séries numériques $\sum a_n$ en ECG lorsque la suite $(a_n)_n$ est réelle s'étend au cas complexe. Notamment :

- La linéarité : si les séries complexes $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergent, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la série $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

- On dit que la série complexe $\sum a_n$ est absolument convergente si la série réelle $\sum |a_n|$ est convergente (ici $|a_n|$ désigne le module de a_n). On montre que :

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

3.2

Définition et exemples

Définition 8 (Séries entières)

Une série entière est une série de fonctions de type $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est à termes dans $\mathbb{R}$ et z une variable réelle ou complexe.

Exemples de séries entières réelles vues en ECG.

- Les cas géométriques : soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k , kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Les cas trigonométriques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- Le cas exponentielle et logarithmique

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque. Ces formules ont été prouvées à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange (et non Taylor-Young). En étendant au cas complexe, on montre que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

- Extension de la formule du binôme.** Rajoutons un dernier exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

3.3 Rayon de convergence

Théorème 9 (d'Abel)

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Si la suite de terme général $a_n z_0^n$ est bornée,
alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Définition 10 (Rayon de convergence, disque/intervalle de convergence)

Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. On définit :

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ par $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\}$.
- Si $R > 0$ alors :
 - Pour $\mathbb{R} = \mathbb{C}$, on appelle disque (ouvert) de convergence le disque de rayon R et centrée en l'origine.
 - pour $\mathbb{R} = \mathbb{R}$, on appelle intervalle (ouvert) de convergence, l'intervalle $] -R, R[$.

Exercice 4



◇ On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = 3 - 4i$ mais qu'elle converge pour $z = 5i$. Que dire du rayon de convergence de la série?

Remarque. Caractérisations du rayon de convergence

Voici plusieurs définitions équivalentes du rayon de convergence :

$$\begin{aligned} R &= \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge}\} = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\} \\ &= \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} = \sup \left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ est bornée}\right\}. \end{aligned}$$

3.4 Règles de calculs sur le rayon

Proposition 11 (Comparaison des rayons de convergence)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectif R_a et R_b .

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$ alors : $R_a \geq R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors : $R_a = R_b$.

Exercice 5



Applications

Les questions sont indépendantes

1. Si $a_n = o(b_n)$, comparer R_a et R_b .
2. Calculer le rayon de $\sum a_n z^n$ où a_n désigne la n -ième décimale de π .

ceAnC6

Proposition 12 (Combinaison linéaire et rayons)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectif R_a et R_b .

- Si $\lambda \neq 0$ alors la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$ est aussi de rayon R_a .
- Le rayon R de la somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Théorème 13 (Critère de D'Alembert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si**
- La suite $(a_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang;
 - Le rapport $|a_{n+1}/a_n|$ admet une limite finie.

Alors le rayon de convergence R de la série entière vérifie : $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Exercice 6



- ♦ Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{llll} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+3)! z^n; & \sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n; & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n; & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}; & \sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^n z^n. \end{array}$$

ceAnC7

3.5 Unicité du développement en séries entières

Théorème 14 (Unicité du développement)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence supérieur à un certain réel $R > 0$. Si

$$\forall x \in]-R; R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$

Exercice 7



♦♦ **Preuve.** Notons pour $x \in]-R; R[, S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. Justifier que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_a(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o_0(x^{N+1})$.
2. En déduire que si les fonctions S_a et S_b sont égales alors $a = b$.

ceAnC8

3.6 Régularité des séries entières

Continuité et dérivabilité sur le disque ouvert

Proposition 15 (Régularité des séries entières)

- Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.
- Si le rayon de convergence R est strictement positif, alors la fonction $S_a : x \in]-R; R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable avec

$$\forall x \in]-R; R[, \quad S'_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Caractère lisse sur l'intervalle ouvert de convergence

Théorème 16 (Régularité des séries entières)

Toute série entière d'une variable réelle de rayon de convergence non nul est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence.

Plus précisément, si on note pour tout $x \in]-R; R[, S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$S_a^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

Remarque. Dans ce cas, on constate que $S_a^{(p)}(0) = p! a_p$ et donc $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!} x^n$. On retrouve ici l'unicité du développement en série entière énoncé plus haut.

Exercice 8



♦ **Les séries géométriques dérivées à tout ordre**

1. Déterminer une suite a telle que : $\forall x \in]-1; 1[, \quad S_a(x) = \frac{1}{1-x}$.
2. En déduire que pour tout $x \in]-1; 1[,$ on a

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

ceAnC9



Exercices



Exercice 9. ♦ Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$. # ceAnC10

Exercice 10. ♦ On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(3n)!$. Pour cela, on introduit

ceAnC11

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \quad \text{et} \quad j = e^{2i\pi/3}.$$

1. Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
2. En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(3n)!$.

Exercice 11. ♦♦ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose

ceAnC12

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

1. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$
2. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
3. Exprimer alors R' en fonction de R .

Exercice 12. ♦ Donner le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme de degré p . # ceAnC13

Exercice 13. ♦ On souhaite développer en série entière la fonction f définie au voisinage de 0 par

ceAnC14

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

1. On suppose qu'un tel développement existe : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En utilisant la relation $(1 - x - x^2)f(x) = x$, donner une relation de récurrence linéaire sur la suite $(a_n)_n$.
2. Conclure.

Exercice 14. ♦♦ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose pour tout $x \in]-R; R[$, $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. # ceAnC15

1. Continuité

a) Soient $r \in]0; R[$, $x \in [-r; r]$ et h un réel tel que : $x + h \in [-r; r]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |(x+h)^n - x^n| \leq nr^{n-1}|h|.$$

b) Justifier alors que $|S_a(x+h) - S_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|$.

c) Montrer alors que S_a est continue sur $[-r; r]$ puis sur $] -R; R[$.

2. Caractère $\mathcal{C}^1$

On considère ici $r \in]0; R[$ et $x \in [-r; r]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

a) Justifier que la série entière $\sum n a_n z^n$ est aussi de rayon de convergence R .

On pose alors pour tout $x \in]-R; R[$, $g_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

b) Montrer que g_a est définie et continue sur $] -R; R[$.

c) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n(x) = a_0 + \int_0^x s'_n(t) dt$.

d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^x (g_a(t) - s'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k.$$

e) En déduire que : $S_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt$.

f) Montrer alors que S_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R; R[$ et que : $S'_a = g_a$.

Exercice 15. ♦♦♦ Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la série entière.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soient $r \in]0, R[$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$b_n = k! \binom{n+k}{k} a_{n+k}.$$

1. Justifier que $b_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Que peut-on en déduire du rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$?
2. Montrer par récurrence que S_a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et que pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout $x \in] -R, R[$,

$$S_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right).$$

On pourra comparer $S_a^{(k)}$ et S_b .

Exercice 16. ♦ Souvenir d'ECG : application aux probabilités

Soit X , une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbf{P}(X = n)$ et on suppose que la série $\sum p_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 1$.

1. Justifier que X admet un moment à tout ordre.
2. Exprimer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ à l'aide de $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.