

Compléments en analyse

Entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.

Paul Painlevé (1863-1933)

Ce chapitre complète le programme d'analyse d'ECG en traitant le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et le cas des séries entières.

1 Analyse pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

1.1 Limites et continuité

- Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, a un point adhérent à I dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Soient $f_r = \Re(f)$, $f_i = \Im(f)$, $\ell_r = \Re(\ell)$ et $\ell_i = \Im(\ell)$. On dit que la fonction complexe f admet **une limite** ℓ en a si, et seulement si, les fonctions réelles f_r et f_i admettent des limites en a et

$$\lim_a f_r = \ell_r \quad \text{et} \quad \lim_a f_i = \ell_i.$$

- Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et a un point adhérent à I . On dit que la fonction complexe f est **continue** en $a \in I$ (resp. sur I) si, et seulement si les fonctions réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont.

1.2 Dérivation

DÉFINITION

Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est **dérivable** en x_0 si l'expression $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque le réel h tend vers 0, c'est-à-dire s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Dans ce cas, on définit la dérivée de f en x_0 par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

 **Attention.** Dans la définition, on considère h réel. On peut très bien étudier la limite avec h complexe, mais la notion est plus contraignante. On obtient alors la notion de fonction analytique (cours L3).

La dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ se ramène en fait à la dérivation de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (la partie réelle et la partie imaginaire). En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on a alors une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Généralisation. En itérant le procédé, on peut définir les fonctions à valeurs complexes dérivables n fois.

PROPOSITION

Lien avec la partie imaginaire et réelle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, et définissons les fonctions f_r et f_i de I dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall x \in I, \quad f_r(x) = \Re(f(x)) \quad \text{et} \quad f_i(x) = \Im(f(x)).$$

Alors on en l'équivalence entre :

- i) La fonction complexe f est dérivable en x_0 ;
- ii) Les fonctions réelles f_r et f_i le sont en x_0 .

Dans ce cas,

$$f'(x_0) = f_r'(x_0) + i f_i'(x_0).$$

Exercice 1



◇ Calculer la dérivée de $f : x \mapsto e^{ix}$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $f(0)$ et $f(2\pi)$. Commenter.

ceAnC1

Remarque. Les règles de calculs sur les dérivées complexes sont identiques au cas réel : Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivables en $x_0 \in I$. Alors :

- La fonction somme $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$;
- La fonction produit fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Exemple. Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Alors e^f est dérivable et

$$\boxed{(e^f)' = f' e^f} \quad (\star)$$

Preuve. En effet, pour $f_r = \Re(f)$ et $f_i = \Im(f)$: ce sont deux fonctions à valeurs réelles et on a

$$e^f = e^{f_r} (\cos f_i + i \sin f_i),$$

$$\text{d'où} \quad (e^f)' = f_r' e^{f_r} (\cos f_i + i \sin f_i) + e^{f_r} (-f_i' \sin f_i + i f_i' \cos f_i) = f_r' e^f + i f_i' e^f = f' e^f.$$

La question des variations de f à valeurs complexes n'a plus grand sens car l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné. En revanche, il est toujours possible d'étudier les variations des parties réelle et imaginaire. De plus, les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux dans $\mathbb{C}$ (voir exercice précédent). Par contre, on a :

THÉORÈME

inégalité d'accroissements finis - cas complexe

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, dérivable sur $]a; b[$.

Si la fonction $|f'|$ est majorée par M sur $]a; b[$,

alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Preuve. On écrit $f(b) - f(a) = r e^{i\theta}$ sous forme exponentielle ($r \geq 0$) et considérons $g = e^{-i\theta} f$, g_r et g_i ses parties réelle et imaginaire. Pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $|g'_r(x)| \leq |g'(x)| = |f'(x)| \leq M$, d'où, on appliquant l'inégalité d'accroissements finis à la fonction réelle g_r :

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= r = g(b) - g(a) \\ &= (g_r(b) - g_r(a)) + i(g_i(b) - g_i(a)) = g_r(b) - g_r(a) \quad (\text{car } r \text{ est réel}) \\ |f(b) - f(a)| &\leq M|b - a|. \end{aligned}$$

 **Attention.** Dans l'énoncé, on a majoré par $|f'|$ et non par $|f|'$.

Remarque. On peut donner un cas particulier fréquent : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f' est bornée, et

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{[a, b]} |f'| \cdot |b - a|.$$

COROLLAIRE

Cas constant

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable, I étant un intervalle. Alors f est constante si, et seulement si, $f' = 0$.

Preuve. Si f est constante, alors on a directement $f' = 0$. Réciproquement, si $f' = 0$, montrons que f est constante. Soient a et b dans I , $a < b$. L'inégalité d'accroissements finis appliquée à f sur l'intervalle $[a, b]$ montre que $|f(b) - f(a)| \leq 0$, donc que $f(b) = f(a)$.

1.3 Intégration

Étant donnée une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, on rappelle que l'on peut décomposer f en $f = f_r + i f_i$, où f_r et f_i sont à valeurs réelles. C'est la décomposition algébrique de f .

DÉFINITION

Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f = f_r + i f_i$, la décomposition algébrique d'une fonction complexe f . Soient $a, b \in I$. On dit que la fonction f est **intégrable** si et seulement si f_r et f_i le sont, et dans ce cas,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_r(t) dt + i \int_a^b f_i(t) dt.$$

Exemples.

$$\rightarrow \int_0^\pi e^{it} dt = \int_0^\pi \cos(t) dt + i \int_0^\pi \sin(t) dt = [\sin(t)]_0^\pi + i[-\cos(t)]_0^\pi = 2i.$$

→ Soient $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $a \in \mathbb{C}$ et f définie (sur $I = \mathbb{R}$, $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ selon que n est positif ou non) par $f : t \in I \mapsto (t - a)^n$. Alors $F : t \in I \mapsto \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f .

→ Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $a_1 = \Re(a)$ et $a_2 = \Im(a)$ (donc $a_2 \neq 0$). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{1}{t-a}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \frac{1}{(t-a_1) - i a_2} = \frac{(t-a_1) + i a_2}{(t-a_1)^2 + a_2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(t-a_1)}{(t-a_1)^2 + a_2^2} + i \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t-a_1}{a_2}\right)^2 + 1}$$

donc $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{1}{2} \ln((t-a_1)^2 + a_2^2) + i \arctan\left(\frac{t-a_1}{a_2}\right)$ est une primitive de f .

→ Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{at}$. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{e^{at}}{a}$. On a vu (voir relation $(\star)$) que F était dérivable et que $F' = f$. Ainsi, F est une primitive de f .

On montre que l'ensemble des fonctions intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel, et que l'intégrale est une forme linéaire. On vérifie également la relation de Chasles, ainsi que l'intégrabilité d'un produit de fonctions

intégrables en décomposant les fonctions sous forme algébrique. Le théorème fondamental reste vrai dans le cas complexe. De même avec les formule de Taylor avec reste intégrale.

Par ailleurs, une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ étant continue si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, on a aussi le théorème avec des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Le seul résultat qu'il ne soit pas complètement immédiat de généraliser est l'inégalité triangulaire, qu'on peut déduire du cas réel par un argument de rotation :

PROPOSITION

Inégalité triangulaire intégrale dans $\mathbb{C}$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors $|f|$ est aussi intégrable, et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Exercice 2



- ◆ Prouver cet énoncé.

ceAnC17

2

Passage dans $\mathbb{C}$ pour des problèmes bien réels

Les parties de cette section sont indépendantes. On recense ici plusieurs problèmes de calculs où le passage dans le domaine complexe permet d'avoir le résultat plus directement.

2.1 Calculs de somme

Exercice 3



- ◆ Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kt), \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kt)^2 \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{k=0}^n \cos(kt).$$

2. Déterminer les solutions réelles x de $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) = 0$.

ceAnC2

2.2 Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

Pour rappel, une suite u est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n. \quad (\bullet)$$

Remarques.

- Notons que, si $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ alors u est la suite nulle (récurrence à deux pas).

Plus généralement, si on a deux suites u et u' vérifiant la même relation $(\bullet)$ et avec les mêmes conditions initiales :

$$u_0 = u'_0 \quad \text{et} \quad u_1 = u'_1,$$

alors les suites sont égales ($u = u'$).

- Soient v et w deux suites vérifiant $(\bullet)$. Montrons que pour tous réels λ, μ , la suite $\lambda v + \mu w$ vérifie aussi $(\bullet)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 (\lambda \cdot v + \mu \cdot w)_{n+2} &= \lambda v_{n+2} + \mu w_{n+2} && \text{par définition} \\
 &= \lambda(\alpha v_{n+1} + \beta v_n) + \mu(\alpha w_{n+1} + \beta w_n) && \text{car } v, w \text{ vérifient } (\bullet) \\
 &= \alpha(\lambda v_{n+1} + \mu w_{n+1}) + \beta(\lambda v_n + \mu w_n) \\
 (\lambda \cdot v + \mu \cdot w)_{n+2} &= \alpha(\lambda \cdot v + \mu \cdot w)_{n+1} + \beta(\lambda \cdot v + \mu \cdot w)_n.
 \end{aligned}$$

- Cherchons des suites solutions sous la forme de suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Une suite géométrique est solution de $(\bullet)$ si et seulement si

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad q^{n+2} = \alpha q^{n+1} + \beta q^n \right) \iff q^2 = \alpha q + \beta.$$

En définitive, on obtient une solution si et seulement si q est solution d'une équation polynomiale de degré 2.

À une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $(\bullet)$, on associe l'équation dite **caractéristique**

$$x^2 = \alpha x + \beta \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions va dépendre du nombre de solutions réelles, c'est-à-dire du discriminant de l'équation caractéristique.

THÉORÈME

(Rappel) Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2 - $\Delta \geq 0$.

Considérons une suite u récurrente linéaire réelle d'ordre 2.

$$\exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n. \quad (\bullet)$$

Notons $\Delta = \alpha^2 + 4\beta$, le discriminant de l'équation caractéristique :

- Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 et

$$\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors il y a une racine double r et

$$\exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

Preuve. Soit u , une suite vérifiant $(\bullet)$. Distinguons deux cas :

- Si $\Delta > 0$.

Il y a deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2 . D'après la troisième remarque, les deux suites

$$v = (r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad w = (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

vérifient aussi $(\bullet)$. Puis, pour tous réels λ, μ , la suite $\lambda v + \mu w$ vérifie aussi $(\bullet)$.

Justifions l'existence de deux réels λ et μ afin que les suites u et $u' = \lambda v + \mu w$ aient les mêmes conditions initiales. Pour $n = 0$ et $n = 1$

$$\begin{cases} u_0 = u'_0 \\ u_1 = u'_1 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2} \\ \mu = \frac{r_1 u_0 - u_1}{r_1 - r_2} \end{cases}.$$

Précisons que λ et μ sont bien définis puisque $r_1 \neq r_2$. Or, à l'aide des deux premières remarques, u et u' sont solutions de $(\bullet)$ avec les mêmes conditions initiales. Nécessairement $u = u'$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u'_n = \lambda v_n + \mu w_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$.

Soit r l'unique racine de l'équation caractéristique. Le réel r vérifie $r^2 = \alpha r + \beta$ et $r = \alpha/2$. Précisons que r ne peut être égal à 0 car on en déduirait que $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. Ce cas étant exclu par hypothèse. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n / r^n$ de sorte que

$$v_{n+2} = \frac{u_{n+2}}{r^{n+2}} = \frac{\alpha u_{n+1} + \beta u_n}{r^{n+2}} = \frac{\alpha}{r} v_{n+1} + \frac{\beta}{r^2} v_n.$$

À l'aide des relations précédentes, il vient : $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$, puis, $v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1} - v_n$.

La suite de terme général $v_{n+1} - v_n$ est constante. Si μ est la constante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \mu, \quad \text{d'où} \quad v_{n+1} = v_n + \mu.$$

La suite v est arithmétique de raison μ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + \mu n$, puis $u_n = (v_0 + \mu n)r^n$. Ce qui conclut le second point en posant $\lambda = v_0$. ■

THÉORÈME

Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2 - $\Delta < 0$.

Si $\Delta < 0$, alors il y a deux racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$ et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))r^n.$$

Preuve. • Considérons le cas $\Delta < 0$, les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées. Posons $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1}$. En reprenant la preuve du premier cas, il y a deux suites complexes solutions

$$(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Comme α et β sont réels, les suites conjuguées $(\overline{r_1}^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\overline{r_2}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi solution de (•).

Par stabilité par combinaison linéaire, les suites réelles $(r^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ sont aussi solutions car

$$r^n \cos(n\theta) = \Re(r_1^n) = \frac{r_1^n + \overline{r_1}^n}{2} \quad \text{et} \quad r^n \sin(n\theta) = \Im(r_1^n) = \frac{r_1^n - \overline{r_1}^n}{2i}.$$

2.3 Calculs d'intégrales

• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_*^+$. Il arrive souvent (en physique notamment) que l'on souhaite calculer une intégrale dont l'intégrande est du type :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t) \quad \text{ou} \quad g : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t).$$

L'idée est alors de travailler $\mathbb{C}$ en remarquant que pour t réel, on a

$$e^{\alpha t} \cos(\omega t) = e^{\alpha t} \Re(e^{i\omega t}) = \Re(e^{(\alpha+i\omega)t}) \quad \text{et} \quad e^{\alpha t} \sin(\omega t) = e^{\alpha t} \Im(e^{i\omega t}) = \Im(e^{(\alpha+i\omega)t}).$$

Or, $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}$ est une primitive de $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ dt sur $\mathbb{R}$. On peut alors calculer

$$\begin{cases} F(t) := \Re\left(\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}\right) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)). \\ G(t) := \Im\left(\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{(\alpha+i\omega)t}\right) \underset{\text{calcul}}{=} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t)) \end{cases}$$

puisque

$$\frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha-i\omega}{(\alpha+i\omega)(\alpha-i\omega)} = \frac{\alpha-i\omega}{|\alpha+i\omega|^2} = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

La fonction F est une primitive de f et la fonction G est une primitive de g .

Exercice 4



♦ Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos(x)^2 dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} x^2 e^x \cos(x) dx.$$

• Le cas particulier d'intégrale comportant des termes du type $\cos^p$ et $\sin^p$: peuvent être traités en utilisant les formules d'Euler.

Par exemple, linéarisons l'expression $\cos(\theta)^3$: Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 \\ &= \cos(\theta)^3 + 3 \cos(\theta)(i \sin(\theta))^2 + 3i \sin(\theta) \cos(\theta)^2 + (i \sin(\theta))^3 \\ &= \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 + 3i \sin(\theta) \cos(\theta)^2 - i \sin(\theta)^3 \\ \cos(3\theta) + i \sin(3\theta) &= \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 + i(3 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^3).\end{aligned}$$

Par unicité de la partie réelle, $\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2$. Puis, par le théorème de Pythagore,

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) (1 - \cos(\theta)^2) = 4 \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta).$$

On en déduit par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \cos(\theta)^3 d\theta &= \int_0^{\pi/3} \left(\frac{3}{4} \cos(\theta) + \frac{1}{4} \cos(3\theta) \right) d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi/3} \cos(\theta) d\theta + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \cos(3\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{4} [\sin(\theta)]_0^{\pi/3} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \sin(3\theta) \right]_0^{\pi/3} = \frac{3}{4} \sin(\pi/3) + \frac{1}{12} \sin(\pi) \\ \int_0^{\pi/3} \cos(\theta)^3 d\theta &= \frac{3\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Exercice 5



◆ Exemple

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3$ en fonction de $\sin(\theta)$, $\sin(3\theta)$ et $\sin(5\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \sin(t)^3 dt$.

ceAnC4

3

Introduction aux séries entières

3.1

Précisions sur les séries numériques complexe

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On dit que la série $\sum a_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Cela équivaut à dire que les séries réelles $\sum \Re(a_n)$ et $\sum \Im(a_n)$ convergent. De plus dans le cas convergent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Re(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

• Certains résultats vus pour les séries numériques $\sum a_n$ en ECG lorsque la suite $(a_n)_n$ est réelle s'étend au cas complexe. Notamment :

- La linéarité : si les séries complexes $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergent, alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la série $\sum (\lambda a_n + \mu b_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

- On dit que la série complexe $\sum a_n$ est absolument convergente si la série réelle $\sum |a_n|$ est convergente (ici $|a_n|$ désigne le module de a_n). On montre que :

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.

Preuve. En effet, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\Re(a_n)| \leq |a_n| \quad \text{et} \quad |\Im(a_n)| \leq |a_n|.$$

Par le critère de majoration, on prouve que les séries réelles $\sum \Re(a_n)$ et $\sum \Im(a_n)$ sont convergentes, la série $\sum a_n$ l'est donc aussi par combinaison linéaire.

La réciproque est fautive $\sum (-1)^n/n$ étant un contre-exemple.

 **Attention.** Le critère d'équivalence n'est plus directement valable puisque la condition que le terme général soit positif n'a pas de sens pour des termes complexes.

3.2 Définition et exemples

DÉFINITION

Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de type $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est à termes dans $\mathbb{K}$ et z une variable réelle ou complexe.

Exemples de séries entières réelles vues en ECG.

- Les cas géométriques : soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k , kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Les cas trigonométriques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- Le cas exponentielle et logarithmique

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Remarque. Ces formules ont été prouvées à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange (et non Taylor-Young). En étendant au cas complexe, on montre que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Notons que cette formule permet de retrouver le développement en série entière du cosinus et du sinus puisque pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(\theta) + i\sin(\theta) &= \exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \cos(\theta) + i\sin(\theta) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

On conclut par unicité de la partie réelle et imaginaire.

- Extension de la formule du binôme.** Rajoutons un dernier exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

3.3 Rayon de convergence

THÉORÈME

d'Abel

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

- Si** la suite de terme général $a_n z_0^n$ est bornée,
alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Preuve. Notons K un majorant de $(a_n z_0^n)_n$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq |z_0|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq K R^n$$

avec $R = |z/z_0| \in [0; 1[$. La série géométrique $\sum K R^n$ converge. Par le critère de majoration, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, elle converge. ■

DÉFINITION

Rayon de convergence, disque/intervalle de convergence

Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On définit :

- Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ par $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\}$.
 - Si $R > 0$ alors :
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle disque (ouvert) de convergence le disque de rayon R et centrée en l'origine.
- pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle intervalle (ouvert) de convergence, l'intervalle $] -R, R[$.

Remarques.

- Par convention, on pose $R = +\infty$ si la partie n'est pas majorée.

• Caractérisations du rayon de convergence

Voici plusieurs définitions équivalentes du rayon de convergence :

$$\begin{aligned} R &= \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge}\} = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\} \\ &= \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} = \sup \left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ est bornée}\right\} \end{aligned}$$

Preuve. On définit les ensembles :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\} \\ A_2 &= \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge}\} \\ A_3 &= \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} \\ A_4 &= \left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right\}. \end{aligned}$$

Notons R_i la borne supérieure de A_i . Comme

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4, \quad \text{on a} \quad R_1 \leq R_2 \leq R_3 \leq R_4.$$

Montrons que $R_4 \leq R_1$ afin d'établir les égalités.

Soit $r \in A_4$, donc $(a_n r^n)_n$ est bornée et, d'après le théorème d'Abel, pour tout $\rho \in [0, r[$, la série $\sum a_n \rho^n$ converge absolument. Ainsi

$$[0, r[\subset A_1.$$

Ceci étant vrai pour tout $r < R_4$, on a

$$[0, R_4[= \bigcup_{r < R_4} [0, r[\subset A_1.$$

On en déduit que

$$R_4 = \sup [0, R_4[\leq \sup A_1 = R_1.$$

Finalement, $R_1 = R_4$ et par encadrement $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$. ■

Exercice 6



◇ On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ diverge pour $z = 3 - 4i$ mais qu'elle converge pour $z = 5i$. Que dire du rayon de convergence de la série?

ceAnC5

3.4 Règles de calculs sur le rayon

PROPOSITION

Comparaison des rayons de convergence

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectif R_a et R_b .

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$ alors : $R_a \geq R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors : $R_a = R_b$.

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $(b_n z^n)_n$ est bornée, alors $(a_n z^n)_n$ est bornée. D'où

$$\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (b_n r^n)_n \text{ est bornée}\} \subset \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}.$$

Par passage à la borne supérieure, $R_b \leq R_a$.

Pour le second point : si $|a_n| \sim |b_n|$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{2}|a_n| \leq |b_n| \leq \frac{3}{2}|a_n|.$$

Comme $R_{\frac{1}{2}a} = R_{\frac{3}{2}a} = R_a$, on a d'après ce qui précède $R_a \leq R_b \leq R_a$. Donc $R_a = R_b$.

Exercice 7



◇ Applications

Les questions sont indépendantes

1. Si $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$, comparer R_a et R_b .
2. Calculer le rayon de $\sum a_n z^n$ où a_n désigne la n -ième décimale de π .

ceAnC6

PROPOSITION

Combinaison linéaire et rayons

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectif R_a et R_b .

- Si $\lambda \neq 0$ alors la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$ est aussi de rayon R_a .
- Le rayon R de la somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus, si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| < R$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Preuve. C'est une conséquence de la linéarité de la somme pour des séries convergentes.

THÉORÈME

Critère de D'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

- Si** |
- La suite $(a_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang;
 - Le rapport $|a_{n+1}/a_n|$ admet une limite finie.

Alors le rayon de convergence R de la série entière vérifie :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Preuve. C'est une conséquence du critère de D'Alembert pour les séries numériques : soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On suppose que $|u_{n+1}/u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Alors :

- Si $\ell < 1$, la série $\sum_n u_n$ converge absolument;
- Si $\ell > 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement;
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exercice 8



◆ Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{llll} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+3)! z^n; & \sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n; & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n; & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}; & \sum_{n=0}^{+\infty} (1+i)^n z^n. \end{array}$$

ceAnC7

3.5 Unicité du développement en séries entières

THÉORÈME

Unicité du développement

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence supérieur à un certain réel $R > 0$. Si

$$\forall x \in]-R; R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

Exercice 9



◆◆ **Preuve.** Notons pour $x \in]-R; R[, S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S_b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. Justifier que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_a(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o_0(x^N)$.
2. En déduire que si les fonctions S_a et S_b sont égales alors $a = b$.

ceAnC8

3.6 Régularité des séries entières

Le cours sur les séries entières s'inscrit en général dans la continuité du chapitre plus large sur les suites et séries de fonctions. Ce chapitre nécessitant des notions plus fines de convergences (convergences simple, uniforme, normale) que nous n'avons pas le temps de traiter. Nous allons proposer des preuves alternatives et le lecteur intéressé pourra consulter un cours de deuxième année MP.

Continuité et dérivabilité sur le disque ouvert

PROPOSITION

Régularité des séries entières

- Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.
- Si le rayon de convergence R est strictement positif, alors la fonction $S_a : x \in]-R; R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable avec

$$\forall x \in]-R; R[, \quad S'_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

» Pour une preuve, voir exercice 16.

Caractère lisse sur l'intervalle ouvert de convergence

THÉORÈME

Régularité des séries entières

Toute série entière d'une variable réelle de rayon de convergence non nul est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence. Plus précisément, si on note pour tout $x \in]-R; R[$, $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$S_a^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_n x^{n-k}.$$

»» Pour une preuve, voir exercice 17.

Remarque. Dans ce cas, on constate que $S_a^{(p)}(0) = p!a_p$ et donc $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!} x^n$. On retrouve ici l'unicité du développement en série entière énoncé plus haut.

Exercice 10



❖ Les séries géométriques dérivées à tout ordre

1. Déterminer une suite a telle que : $\forall x \in]-1; 1[$, $S_a(x) = \frac{1}{1-x}$.
2. En déduire que pour tout $x \in]-1; 1[$, on a

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$



Exercices



Exercice 11. ♦ Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est $R = \min(R_a, R_b)$. # ceAnC10

Exercice 12. ♦ On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(3n)!$. Pour cela, on introduit # ceAnC11

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} \quad \text{et} \quad j = e^{2i\pi/3}.$$

1. Calculer $1 + j^k + j^{2k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
2. En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(3n)!$.

Exercice 13. ♦♦ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose # ceAnC12

$$b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$$

et on note R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

1. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$
2. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.
3. Exprimer alors R' en fonction de R .

Exercice 14. ♦ Donner le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum P(n)x^n$ où P est un polynôme de degré p . # ceAnC13

Exercice 15. ♦ On souhaite développer en série entière la fonction f définie au voisinage de 0 par # ceAnC14

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

1. On suppose qu'un tel développement existe : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En utilisant la relation $(1 - x - x^2)f(x) = x$, donner une relation de récurrence linéaire sur la suite $(a_n)_n$.
2. Conclure.

Exercice 16. ♦♦ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose pour tout $x \in]-R; R[$, $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. # ceAnC15

1. Continuité

- a) Soient $r \in]0; R[$, $x \in [-r; r]$ et h un réel tel que : $x + h \in [-r; r]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |(x+h)^n - x^n| \leq n r^{n-1} |h|.$$

- b) Justifier alors que $|S_a(x+h) - S_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|$.

- c) Montrer alors que S_a est continue sur $[-r; r]$ puis sur $] -R; R[$.

2. Caractère $\mathcal{C}^1$

On considère ici $r \in]0; R[$ et $x \in [-r; r]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

- a) Justifier que la série entière $\sum n a_n z^n$ est aussi de rayon de convergence R .

On pose alors pour tout $x \in]-R; R[$, $g_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

- b) Montrer que g_a est définie et continue sur $] -R; R[$.

- c) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n(x) = a_0 + \int_0^x s'_n(t) dt$.

- d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^x (g_a(t) - s'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k.$$

e) En déduire que : $S_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt$.

f) Montrer alors que S_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ et que : $S'_a = g_a$.

Exercice 17. ♦♦♦ Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la série entière.

ceAnC16

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soient $r \in]0, R[$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$b_n = k! \binom{n+k}{k} a_{n+k}.$$

1. Justifier que $b_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Que peut-on en déduire du rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$?
2. Montrer par récurrence que S_a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et que pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout $x \in] -R, R[$,

$$S_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right).$$

On pourra comparer $S_a^{(k)}$ et S_b .

Exercice 18. ♦ Souvenir d'ECG : application aux probabilités

Soit X , une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbf{P}(X = n)$ et on suppose que la série $\sum p_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 1$.

1. Justifier que X admet un moment à tout ordre.
2. Exprimer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ à l'aide de $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.



Indications et solutions



Exercice 3

1. • Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. On a par la formule du binôme de Newton :

$$(1 + e^{it})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{it})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikt}.$$

La partie réelle de $(1 + e^{it})^n$ est :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kt).$$

D'un autre côté, on a aussi

$$\begin{aligned} (1 + e^{it})^n &= (e^{it/2} (e^{-it/2} + e^{it/2}))^n \\ &= e^{int/2} (e^{-it/2} + e^{it/2})^n \\ &= e^{int/2} (2 \cos(t/2))^n. \end{aligned}$$

Cette nouvelle expression permet d'affirmer que la partie réelle de $(1 + e^{it})^n$ est aussi :

$$2^n \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right).$$

Par unicité de la partie réelle,

$$S_1 = 2^n \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)^n \cos\left(\frac{nt}{2}\right).$$

- On sait que pour tout réel x , $\cos(2x) = 2 \cos(x)^2 - 1$. Il vient

$$S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\cos(2kt) + 1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kt) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Or d'après ce qui précède

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2kt) = 2^n \cos^n(t) \cos(nt),$$

et d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n.$$

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$S_3 = \sum_{k=0}^n \cos(kt) = \sum_{k=0}^n \Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{ikt}\right).$$

On a une somme géométrique de raison $e^{it} \neq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikt} &= \sum_{k=0}^n (e^{it})^k \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{it(n+1)/2} (e^{-it(n+1)/2} - e^{it(n+1)/2})}{e^{it/2} (e^{-it/2} - e^{it/2})} \\ &= e^{it \frac{n}{2}} \frac{\sin\left(t \frac{n+1}{2}\right)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

D'où

$$S_3 = \Re\left(e^{itn/2} \frac{\sin(t(n+1)/2)}{\sin(t/2)}\right) = \cos\left(\frac{tn}{2}\right) \frac{\sin\left(t \frac{n+1}{2}\right)}{\sin(t/2)}.$$

Si t est un multiple de 2π , on a directement $S_3 = n + 1$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ avec t non multiple de 2π . En utilisant la question 1 :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = e^{itn/2} \frac{\sin(t(n+1)/2)}{\sin(t/2)}.$$

En considérant maintenant la partie imaginaire, on trouve :

$$\sum_{k=0}^n \sin(kt) = \sin\left(\frac{tn}{2}\right) \frac{\sin(t(n+1)/2)}{\sin(t/2)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

→ On constate que si x est un multiple de π , x est clairement solution.

→ Soit x non multiple de π . On peut appliquer la relation précédente avec $t = 2x$ et $n = 4$. Sachant que $\sin(0 \cdot x) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) &= \sum_{k=0}^4 \sin(k \cdot 2x) \\ &= \sin\left(\frac{2x \cdot 4}{2}\right) \frac{\sin(2x(4+1)/2)}{\sin(2x/2)} \end{aligned}$$

$$\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) = \sin(4x) \frac{\sin(5x)}{\sin(x)}.$$

Ceci est nul si et seulement si :

$$\sin(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(5x) = 0$$

ssi

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad 4x = k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 5x = k\pi$$

ssi

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{k\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{k\pi}{5}.$$

Notons que ces expressions englobent le cas où x est un multiple de π .

Exercice 4

- Par la formule de duplication :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos(2x) dx. \end{aligned}$$

Or, par linéarité de la partie réelle :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos(2x) dx &= \Re \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-1+2i)x} dx \\ &= \Re \left[\frac{e^{(-1+2i)x}}{-1+2i} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{5}. \end{aligned}$$

On conclut :

$$I = \frac{1}{2} (e^{\pi} - e^{-\pi}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{5} = \frac{3}{5} (e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

- On passe de nouveau par les complexes :

$$J = \int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx = \Re \int_0^{\pi} x^2 e^{ax} dx$$

où $a = 1 + i$. À l'aide d'intégrations par parties :

$$\int_0^{\pi} x^2 e^{ax} dx = \left[e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) \right]_0^{\pi}.$$

En simplifiant :

$$\frac{1}{a} = \frac{1-i}{2}, \quad \frac{1}{a^2} = -\frac{i}{2}, \quad \frac{1}{a^3} = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, \quad e^{a\pi} = -e^{\pi}$$

Le résultat final est :

$$J = \frac{1}{2} + \frac{1-\pi^2}{2} e^{\pi}.$$

Exercice 5

- On développe à l'aide des formules d'Euler,

$$\begin{aligned} &\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \\ &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{2^5 i^3} (e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}) (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{i}{32} ((e^{5i\theta} - e^{-5i\theta}) - (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 2(e^{i\theta} - e^{-i\theta})). \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} &\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 = \\ &= -\frac{1}{16} \sin(5\theta) + \frac{1}{16} \sin(3\theta) + \frac{1}{8} \sin(\theta). \end{aligned}$$

- Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \sin(t)^3 dt \\ &= -\frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \sin(5t) dt + \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \sin(3t) dt \\ &\quad + \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \int_0^{\pi/2} \sin(5t) dt = \frac{1}{5} [\cos(5t)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(3t) dt = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = 1$$

$$\text{Finalement, } \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \sin(t)^3 dt = \frac{2}{15}.$$

Exercice 11

On sait déjà d'après le cours que

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n + b_n| |z|^n = |a_n| \cdot |z|^n + |b_n| |z|^n$$

Pour s'en convaincre, il suffit de procéder par disjonction des cas :

→ Si $a_n \neq 0$ alors $b_n = 0$ et l'égalité est vraie car

$$|a_n + 0| |z|^n = |a_n| \cdot |z|^n + 0 \cdot |z|^n.$$

→ Si $a_n = 0$, l'égalité est aussi vraie.

On constate alors que si $((a_n + b_n) \cdot |z|^n)_n$ est bornée alors $(a_n z^n)_n$ et $(b_n z^n)_n$ le sont aussi. Raisonnons par l'absurde en supposant

$$R > r > \min(R_a, R_b)$$

Ainsi $((a_n + b_n)r^n)_n$ est bornée, $(a_n r^n)_n$ l'est aussi (donc $r \leq R_a$) et $(b_n r^n)_n$ aussi ($r \leq R_b$) absurde. Finalement

$$R = \min(R_a, R_b).$$

Exercice 12

- On a une somme géométrique. Si $j^k \neq 1$

$$1 + j^k + j^{2k} = \frac{1 - j^{3k}}{1 - j^k} = \frac{1 - e^{\frac{2i3k\pi}{3}}}{1 - j^k} = \frac{1 - e^{2ik\pi}}{1 - j^k} = 0.$$

Si $j^k = 1$, on a plus simplement $1 + j^k + j^{2k} = 3$.

Notons que $j^k = 1$ si et seulement si $e^{\frac{2ik\pi}{3}} = 1$ si et seulement si k est un multiple de 3. On poursuit en utilisant le développement en série de l'exponentielle

$$\begin{aligned} e^x + e^{jx} + e^{j^2x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} j^k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} j^{2k} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + j^k + j^{2k}) \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ multi. de } 3}}^{+\infty} (1 + j^k + j^{2k}) \frac{x^k}{k!} \\ e^x + e^{jx} + e^{j^2x} &= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}. \end{aligned}$$

2. D'où

$$S(x) = \frac{1}{3} (e^x + e^{jx} + e^{j^2x}).$$

et
$$S(1) = \frac{1}{3} (e + e^j + e^{j^2}) = \frac{1}{3} (e + e^j + e^{\bar{j}}).$$

Comme $S(1)$ est un réel, on peut se contenter de prendre la partie réelle. Or pour $j = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Re(e^j) &= \Re(e^{a+ib}) = e^a \Re(\cos(b) + i \sin(b)) \\ &= e^a \cos(b). \end{aligned}$$

et

$$\Re(e^{\bar{j}}) = \Re(e^{a-ib}) = e^a \cos(-b) = e^a \cos(b).$$

Comme $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S(1) = \frac{1}{3} \left(e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right).$$

Exercice 13

1. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_n| \geq b_n.$$

Ainsi $R \leq R'$. De plus, on a

$$0 \leq b_n \leq 1$$

et $R' \geq 1$. Ce qui conclut.

2. Considérons l'application

$$f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|} \in]-1; 1[$$

de sorte que

$$b_n = f(a_n).$$

Notons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1; 1[$ et en inversant la relation $y = f(x)$, on montre que

$$\forall y \in]-1; 1[, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Ainsi, on obtient :

$$a_n = f^{-1}(b_n) = \frac{b_n}{1-|b_n|}.$$

Si $R' > 1$ alors on sait que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et on obtient l'équivalent

$$a_n \sim b_n.$$

On sait alors que $R = R'$.

3. Si $R' > 1$ alors $R = R' > 1$. Sinon $R' \leq 1$ et d'après la question 1, $R = 1$. on a donc

$$R' = \max(R, 1).$$

Exercice 14

• On sait que pour tout entier $k \geq 0$, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^k z^n$$

a pour rayon de convergence $R = 1$ (car n^k est de croissance polynomiale). Comme somme finie de séries de rayon 1, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)z^n$$

a un rayon supérieur à 1. Comme $(P(n))_n$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, le rayon de convergence est au plus 1.

Finalement

$$R = 1.$$

• Soit $p \in \mathbb{N}$, le degré de P . La famille de polynômes

$$(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)(X-2) \cdots (X-(p-1)))$$

est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Notons Q_i , le i -ème polynôme de cette famille. Il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^p \alpha_i Q_i.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)z^n = \sum_{i=0}^p \alpha_i \sum_{n=0}^{+\infty} Q_i(n)z^n = \sum_{i=0}^p \alpha_i \sum_{n=i}^{+\infty} Q_i(n)z^n.$$

Or on a en utilisant les résultats sur les dérivées successives de la série géométrique

$$\sum_{n=i}^{+\infty} Q_i(n)z^n = \sum_{n=i}^{+\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-(i-1))z^n = z^i g^{(i)}(z)$$

où $g(z) = 1/(1-z)$. On vérifie ensuite que

$$g^{(i)}(z) = \frac{i!}{(1-z)^{i+1}}.$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)z^n = \sum_{i=0}^p \alpha_i \frac{i!z^i}{(1-z)^{i+1}}$$

Exercice 15

L'exercice propose un raisonnement par une analyse-synthèse. L'analyse pour la question 1. La synthèse pour la 2.

1. Soit $x \in]-r; r[$.

$$\begin{aligned} & (1-x-x^2)f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - a_0 x - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n) x^{n+2}. \end{aligned}$$

Or $(1-x-x^2)f(x) = x$. Donc par unicité du développement en série entière

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci (récurrente linéaire d'ordre 2). La résolution donne

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \omega^n \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{1}{\omega} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

2. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \omega^n.$$

Or les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \rho^n z^n \quad \text{et} \quad \sum \omega^n z^n$$

sont respectivement $1/\rho$ et $1/\omega$. Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est alors donné par le minimum de ces deux rayons, soit

$$R = \frac{1}{\rho}.$$

En reprenant le calcul de la question précédente, la somme S de la série vérifie pour tout $x \in]-R; R[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad (1-x-x^2)S(x) = x.$$

D'où $S(x) = f(x)$. La fonction f est bien développable en série entière.

Exercice 16

1.a) On a par l'identité de Bernoulli et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n| &= \left| (x+h-x) \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^{n-1-k} x^k \right| \\ &\leq |h| \sum_{k=0}^{n-1} |x+h|^{n-1-k} \cdot |x|^k \\ &\leq |h| \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-1-k} \cdot r^k \\ |(x+h)^n - x^n| &\leq n|h|r^{n-1}. \end{aligned}$$

1.b) On a par linéarité de la somme dans le cas convergent :

$$S_a(x+h) - S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n ((x+h)^n - x^n)$$

D'où par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |S_a(x+h) - S_a(x)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot |(x+h)^n - x^n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n| r^{n-1} \cdot |h| \\ |S_a(x+h) - S_a(x)| &\leq \frac{|h|}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n| r^n. \end{aligned}$$

Justifions *a posteriori* la convergence de la série $\sum n|a_n| r^n$.

On a

$$n|a_n| r^n = n|a_n| R^n \left(\frac{r}{R} \right)^n \leq n \left(\frac{r}{R} \right)^n K$$

et on prouve la convergence à l'aide des séries géométriques dérivées.

1.c) Par encadrement, on montre que pour tout $x \in]-r; r[$

$$S_a(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} S_a(x).$$

C'est la définition de la continuité en x et donc sur l'intervalle $] -r; r[$. Comme

$$\bigcup_{r \in]0; R[}] -r; r[=] -R; R[,$$

on en déduit la continuité de S_a sur $] -R; R[$.

2.a) Notons R' , le rayon de convergence de la série $\sum n a_n z^n$. Comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |a_n| \leq n|a_n|$$

on en déduit que $R \geq R'$.

Soit $\rho \in]0; R[$. Soit $r \in]\rho; R[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|n a_n \rho^n| = \left| n \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cdot |a_n| r^n \right|$$

Comme $r < R$, la suite donc $(a_n r^n)$ est bornée. De plus par les croissances comparées

$$n \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit que $n a_n \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En particulier $(n a_n \rho^n)$ est bornée et $\rho \leq R'$. On en déduit que $R \leq R'$. On conclut

$$R = R'.$$

2.b) D'après la question 1.c), on en déduit que $g_a = S_{(n a_n)_n}$ est définie et continue sur $] -\rho; \rho[$ et par extension sur $] -R; R[$.

2.c) La fonction s_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. La relation proposée est donc une conséquence du théorème fondamentale de l'analyse.

2.d) Notons que

$$\int_0^x g_a(t) - s'_n(t) dt = \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} dt.$$

La suite est une conséquence de l'inégalité triangulaire et du fait que $t \in [x, 0] \cup [0, x] \subset]-r; r[$.

2.d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \int_0^x g_a(t) - s'_n(t) dt &= \int_0^x g_a(t) dt - \int_0^x s'_n(t) dt \\ &= a_0 + \int_0^x g_a(t) dt - s_n(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left| S_a(x) - \left(a_0 + \int_0^x g_a(t) dt \right) \right| \\ &= \left| S_a(x) - s_n(x) - \left(a_0 + \int_0^x g_a(t) dt - s_n(t) \right) \right| \\ &\leq |S_a(x) - s_n(x)| + \left| a_0 + \int_0^x g_a(t) dt - s_n(x) \right| \\ &\leq |S_a(x) - s_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k. \end{aligned}$$

Or en tant que reste d'une série convergente

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et par définition de $S_a(x)$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_a(x).$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$

$$\left| S_a(x) - \left(a_0 + \int_0^x g_a(t) dt \right) \right| \leq 0$$

D'où le résultat.

2.f) La fonction

$$F : x \in]-r; r[\mapsto \int_0^x g_a(t) dt$$

est la primitive de g_a qui s'annule en 0. En particulier F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -r; r[$ avec $F' = g_a$. Comme $S_a = a_0 + F$. Ce qui implique aussi la classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -r; r[$ de S_a avec

$$S_a' = g_a.$$

Résultat qui s'étend à $] -R; R[$ car il est valable pour tout réel $r \in]0; R[$.

Exercice 17

1. On a

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

$$\text{D'où} \quad b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k a_{n+k}.$$

Or pour $r \in]0; R[$

$$\left| n^k a_{n+k} r^n \right| = \underbrace{\frac{1}{R^k} n^k \left(\frac{r}{R} \right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{|a_{n+k} R^{n+k}|}_{\text{bornée}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{On en déduit que} \quad b_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La série $\sum b_n z^n$ a un rayon supérieur à R .

2. Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \left[\begin{array}{l} S_a \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ et} \\ \forall x \in]-R; R[, \quad S_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right) \end{array} \right]$$

→ *Initialisation.* On a déjà établi la continuité de S_a . De plus, pour $x \in]-r; r[$

$$0! \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} a_n x^{n-0} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S_a(x)$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a donc par changement d'indice $p = n - k$, on a

$$S_a^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} k! \binom{p+k}{k} a_{p+k} x^p = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p.$$

D'après ce qui précède, $(b_p)_p \in \mathcal{B}(r)$ pour tout $r \in]0; R[$, S_b est définie sur $] -R; R[$ et

$$S_a^{(k)} = S_b.$$

D'après la question 2 de l'exercice précédent, S_b est $\mathcal{C}^1$ sur $] -r; r[$ (et donc sur $] -R; R[$) avec

$$S_b' = g_b : x \in]-R; R[\mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} p b_p x^{p-1}.$$

Or pour $x \in]-R; R[$, on a avec le changement d'indice $n = k + p$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p k! \binom{p+k}{k} x^{p-1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (n-k) k! \binom{n}{k} x^{n-(k+1)}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} (n-k) k! \binom{n}{k} &= (n-k) k! \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+1)(n)!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = (k+1)! \cdot \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S_a^{(k+1)}(x) = S_b'(x) = (k+1)! \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)} \right).$$

La propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est prouvée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.