

THÈME : INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Exercice 1. ♦♦♦ Transformée de Laplace

d'après HEC 2002

Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles.

Partie I : Définition de l'application L

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0, +\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge absolument.

1. a) Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
b) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

- a) Vérifier que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- b) Pour tout réel λ positif ou nul, on note ε_λ la fonction réelle définie par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$ pour tout réel t positif ou nul. Vérifier que, pour tout réel λ positif ou nul, la fonction ε_λ est dans E et, pour tout réel x strictement positif, calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$.
- c) Montrer que, pour tout réel λ positif ou nul et toute fonction f de E, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est aussi dans E et vérifie, pour tout réel x strictement positif, l'égalité : $L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda)$.
3. On considère une fonction H élément de E, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction H' est aussi dans E et, pour tout réel x strictement positif, justifier l'égalité :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x)$$

4. Soit une fonction f élément de E. Pour tout entier naturel n , montrer que la fonction qui à tout réel t positif ou nul associe $t^n f(t)$ est aussi élément de E.

Partie II : Dérivabilité de la fonction L(f)

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f élément de E.

1. Soit h un réel non nul vérifiant l'inégalité $|h| < \frac{x}{2}$.
a) Pour tout réel t strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-xt/2}.$$

- b) Pour tout réel T strictement positif, justifier l'inégalité :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-xt/2} dt.$$

- c) En déduire que $L(f)$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut :

$$(L(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

- d) Montrer que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout entier naturel k , donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k -ième de $L(f)$ en x .
On note $L(f)^{(k)}$, la dérivée k -ième de $L(f)$.

Remarque. Si on définit la fonction de deux variables $g : (x, t) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto f(x) e^{-xt}$, alors on vient de justifier l'interversion

$$\partial_1 \int_0^{+\infty} g(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \partial_1 g(x, t) dt$$

avec un abus de notation dans le premier membre. Cette relation n'est pas toujours vraie.. il convient donc d'être prudent.

Partie III : Injectivité de l'application $L: f \mapsto L(f)$

Dans toute cette partie, on considère un réel x strictement positif et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi f est élément de E .

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\frac{1}{x}$. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) Donner une densité de la variable aléatoire S_n .
b) Donner une densité, qu'on notera φ_n , de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.

2. a) Soit α un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right) = 0$$

- b) En utilisant la continuité de la fonction f en x , pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \subset \left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right]$$

- c) Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| > \varepsilon \right) = 0$$

3. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$.

- a) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , on note A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right]$$

et $\mathbf{1}_{A_n}$ son indicatrice¹. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \mathbf{1}_{A_n} + 2M(1 - \mathbf{1}_{A_n}).$$

- b) Que vaut $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n})$? En déduire l'égalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right) = f(x)$$

4. a) Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt$$

puis l'égalité

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} (L(f))^{(n-1)} \left(\frac{n}{x} \right).$$

- b) Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $L(f) = L(g)$ alors f et g sont égales.
c) Montrer, plus précisément, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vérifient $L(f)(x) = L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a, +\infty[$ (où a est positif ou nul) alors f et g sont encore égales.

>> Voir aussi ESSEC 2010 pour une autre utilisation de la transformée de Laplace. La transformée de Laplace a de nombreux avantages, elle est notamment utilisée en sciences industrielles pour la résolution des équations différentielles linéaires.

1. Pour rappel, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1$ si $\omega \in A_n$ et 0 sinon.