

## DS 7 - sujet A

THÈMES : ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES, PROJECTEURS ORTHOGONAUX  
COMPLÉMENTS VARIABLES À DENSITÉ

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

### Exercice 1

#### Entraînement aux calculs

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ . Soit  $\|\cdot\|$ , la norme associée. On note  $e_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto t \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $\langle \sin, \cos \rangle$  et  $\langle e_1, \cos \rangle$ .

*De même, on montre que  $\langle e_1, \sin \rangle = -2\pi$ .*

2. Vérifier que  $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\right)$  est une famille orthonormée.

3. Dédurre de ces calculs, l'existence du minimum et l'égalité :  $\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a \cos(t) - b \sin(t))^2 dt = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi$ .

### Exercice 2

#### Matrices symétriques

Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 3. On identifie un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  à la matrice *colonne* de ses coordonnées dans la base canonique.

Si  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $m$ , on note respectivement  $E_M$  et  $F_M$  le noyau et l'image de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^m$  dont la matrice dans la base canonique est  $M$ .

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$  est muni de son produit scalaire canonique défini pour deux vecteurs  $X$  et  $Y$  par :

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY.$$

La norme euclidienne d'un vecteur  $X$ , associée à ce produit scalaire, est notée  $\|X\|$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à  $-1$ . On dit qu'une matrice  $A$  carrée d'ordre  $m$  est de type  $n$  si  ${}^tA = A^n$ .

#### 1. Exemples

- a) Qu'est-ce qu'une matrice de type 0, de type 1 ?
- b) Donner un exemple, sous forme de tableau, de matrice *non diagonale* de type  $-1$ .

On suppose désormais que  $n$  est strictement plus grand que 1.

2. Dans cette question seulement on suppose  $m = 3$ .

Soit  $x$  un nombre réel et  $N(x)$  la matrice :

$$N(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}.$$

- a) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Comparer  $N(x+y)$  et  $N(x)N(y)$ . En déduire que pour tout entier strictement positif  $k$  on a  $(N(x))^k = N(kx)$ .
- b) Déterminer alors les réels  $x$  tels que  $N(x)$  soit une matrice de type  $n$ .

#### 3. Test en python

- a) Écrire une fonction qui prend en argument deux matrices et teste si elles sont égales. *Attention, le test  $A == B$  ne suffit pas.*

- b) Adapter le programme pour faire une fonction qui prend en arguments  $n$  et une matrice  $A$  et renvoie 1 ou 0 suivant si la matrice  $A$  est de type  $n$  ou non.
- On revient au cas général  $m$  quelconque et on considère maintenant une matrice  $A$  carrée d'ordre  $m$  et de type  $n$ . On se propose d'établir quelques propriétés de  $A$ .
- Établir l'inégalité  $A^{n^2} = A$ .
    - On pose  $B = A^{n+1}$ . Montrer que  $B^n = B$  et que  $B$  est une matrice symétrique.
    - Que peut-on déduire quant aux valeurs propres de  $B$ ?
    - Soit  $V$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $-1$ . En calculant  ${}^tVBV$  de deux manières différentes montrer que l'on aboutit à une contradiction et qu'ainsi  $-1$  ne peut pas être valeur propre de  $B$ .
    - Montrer que  $B$  est une matrice de projecteur orthogonal.
  - Montrer que  $E_B$  est inclus dans  $E_A$  puis que  $E_B = E_A$ .
    - Montrer que  $F_A = F_B$  et que  $E_A$  et  $F_A$  sont supplémentaires orthogonaux.
  - Soit  $U$  un vecteur de  $F_A$ . Vérifier que  $BU = U$  puis  $\|AU\| = \|U\|$ .
  - Montrer que si  $A$  est inversible et de type  $n$  alors  $B = I_n$  et  $A$  est aussi de type  $-1$ .
  - Montrer que si  $A$  est à la fois de type  $n$  et de type  $n+1$  alors  $A$  est une matrice de projecteur orthogonal.

### Exercice 3

#### Maximum aléatoire de variables de loi exponentielle

#### • Préliminaires

- Soit  $X$ , une variable aléatoire positive à densité admettant une espérance. Justifier que si  $F$  désigne la fonction de répartition de  $X$  alors

$$E(X) = \int_0^{+\infty} 1 - F(t) dt.$$

- Soient  $a$  et  $b$  sont deux réels strictement positifs.

- Établir la convergence de l'intégrale  $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a} du$ .
- Calculer  $J$  (on pourra, par exemple, calculer au préalable  $aJ$ ).

- On considère une suite de variables aléatoires  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre  $b$ .

On considère également une variable aléatoire  $N$  définie sur le même espace probabilisé, indépendante des  $Y_k$  et suivant la loi géométrique de paramètre  $s \in ]0; 1[$ .

De plus,  $Z$  est la variable aléatoire définie par :

$$Z = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_N).$$

On rappelle que si  $\omega$  est un élément de  $\Omega$  alors  $Z(\omega)$  est le plus grand des réels :  $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_N(\omega)$ .

#### 3. Python

- On rappelle que si  $T$  est la variable aléatoire qui renvoie le rang du premier succès dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de probabilité de succès  $s$ , alors  $T$  suit une loi géométrique de paramètre  $s$ . En déduire un code qui simule  $T$  en utilisant seulement la commande `rd.random()`.
  - Si  $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0; 1[)$ . Quelle est la loi de  $-\ln(U)/b$ ?
  - En déduire un programme qui permet de simuler la variable  $Z$  en utilisant seulement la commande `rd.random()`.
- Soient  $j$  un entier strictement positif et  $t$  un réel positif. Calculer la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}(Z \leq t \mid N = j)$ .
  - En déduire la fonction de répartition de  $Z$  puis une densité de la variable aléatoire  $Z$ .

- Montrer que  $Z$  admet une espérance et que  $E(Z) = \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}$ .

Seul le résultat de la question 5) est nécessaire pour traiter les questions suivantes.

- Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(0) = 1$  et  $g(t) = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$  pour  $t > 0$ .

- Montrer que la fonction  $g$  est continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ .

- Établir, pour tout réel  $t$  appartenant à  $[0, +\infty[$  et tout entier  $n$  positif, l'égalité :  $g(t) = g(t)e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^n te^{-(k+1)t}$ .

8. Justifier la convergence, pour tout entier positif  $k$ , de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt$  et la calculer.
9. Montrer alors la convergence et l'égalité :  $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .
10. On admet que la somme de cette série est  $\frac{\pi^2}{6}$ . Montrer que la valeur moyenne de  $E(Z)$  sur  $]0, 1[$ , c'est-à-dire  $\int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)} ds$  est égale à  $\pi^2/(6b)$ .

## Problème

### Fonctions matriciellement croissantes

Dans la suite,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes à coefficients réels,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Une matrice  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geq 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad {}^tXSX > 0.$$

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  positives et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  définies positives.

#### • Préliminaires

1. a) Soit  $S \in \mathcal{S}_n$ . Justifier les équivalences entre les énoncés :
  - i) La matrice  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+$ ;
  - ii) Le spectre de  $S$  est inclus dans  $\mathbb{R}^+$ .
  - iii) Il existe  $M \in \mathcal{S}_n^+$  telle que  $S = {}^tMM$ .
- b) Donner un résultat similaire pour une matrice de  $\mathcal{S}_n^{++}$ .

### Partie I : une relation d'ordre

On munit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des relations notées  $\leq$  et  $<$ , définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, \quad (S_1 \leq S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, \quad (S_1 < S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})).$$

#### • Premières propriétés

2. Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$  et  $S_2 \leq S_1$ , montrer que  $\text{Sp}(S_2 - S_1) \subset \{0\}$  puis  $S_1 = S_2$ .
3. a) Justifier qu'une matrice symétrique non nulle de trace nulle ne peut pas être définie positive.
- b) On pose

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A-t-on  $S_1 \leq S_2$  ?  $S_2 \leq S_1$  ?

4. Si  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  avec  $S_1 \leq S_2$  et  $S_1 \neq S_2$ . A-t-on  $S_1 < S_2$  ?
5. Si  $S, S_1$  et  $S_2$  sont trois matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$ , comparer les matrices  $S + S_1$  et  $S + S_2$  pour la relation  $\leq$ .

#### • Python

6. On commence par importer les bibliothèques :

Editeur

```
import numpy as np
from numpy import linalg as la
```

La commande `la.eig(A)[0]` renvoie une matrice contenant les valeurs propres de la matrice  $A$ .

- a) Écrire une fonction qui prend en argument une matrice et teste si cette dernière est symétrique.

- b) En déduire un programme qui prend en arguments deux matrices  $S_1$  et  $S_2$  puis renvoie 1,  $-1$  ou 0 suivant si  $S_1 \leq S_2$ ,  $S_1 \geq S_2$  ou ni l'un ni l'autre.

• **Passage à l'inverse**

L'objectif des questions 7 et 8 est d'établir de deux manières différentes la propriété :

$$(\mathcal{P}) : \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_2^{-1} \leq S_1^{-1}.$$

7. — *Preuve 1*

- a) Soit  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  avec  $S_1 \leq S_2$ . Montrer que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tMS_1M \leq {}^tMS_2M$ .  
b) On suppose dans cette question seulement que  $I_n \leq S$ .  
Justifier que  $\text{Sp}(s) \subset [1; +\infty[$ . En déduire que  $S$  est inversible et  $0 < S^{-1} \leq I_n$ .  
c) Soit  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  tel que  $0 < S_1 \leq S_2$  et  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S_1 = {}^tMM$ . Montrer que  $I_n \leq {}^t(M^{-1})S_2M^{-1}$ , en déduire que  $S_2$  est inversible et  $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$ .

8. — *Preuve 2*

- a) Soit  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on définit l'application :

$$\varphi_X^S : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ Y & \mapsto 2{}^tXY - {}^tYSY. \end{cases}$$

- i) Vérifier que pour tout  $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_X^S(S^{-1}X + H) - \varphi_X^S(S^{-1}X) - {}^tHSH$ .  
ii) En déduire que  $\varphi_X^S$  admet en  $S^{-1}X$  un maximum qui vaut  ${}^tXS^{-1}X$ .  
b) On considère maintenant  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  vérifiant  $S_1 \leq S_2$ .  
Montrer que pour tout  $X$  et tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_X^{S_1}(Y) \geq \varphi_X^{S_2}(Y)$ . En déduire que  $S_1^{-1} \leq S_2^{-1}$ .  
c) A-t-on :

$$(\widetilde{\mathcal{P}}) : \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad S_1 < S_2 \Rightarrow S_2^{-1} < S_1^{-1} \quad ?$$

• **Passage à puissance**

9. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$p_\alpha : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et pour tout  $x$  réel, soit  $A(x)$  et  $B(x)$  les matrices définies par :

$$A(x) = \begin{bmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ch } x} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

- a) En remarquant que  $\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$ , montrer que pour tout  $x$  réel,  $B(x) \leq A(x)$ .  
b) Pour  $x \neq 0$ , déterminer explicitement la décomposition spectrale de  $A(x)$ . Vérifier que les matrices de projection obtenues sont indépendantes de  $x$ .  
c) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{p}_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$ .  
d) Expliciter pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\widetilde{p}_\alpha(B(x))$ .  
e) Calculer  $\zeta(x) = \det[\widetilde{p}_\alpha(A(x)) - \widetilde{p}_\alpha(B(x))]$ , puis vérifier l'équivalent au voisinage de 0 :  $\zeta(x) \sim \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}x^2$ .  
f) En déduire que pour  $\alpha > 1$ ,  $\widetilde{p}_\alpha$  n'est pas croissante.

**Bonus** Que prouve Bertrand Russel, mathématicien (en autre) dans ces quelques lignes ?

\*54.43.  $\vdash : \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . *54.26. \supset \vdash : \alpha = \iota'x. \beta = \iota'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. x \neq y.$$

$$[*51.231] \quad \equiv. \iota'x \cap \iota'y = \Lambda.$$

$$[*13.12] \quad \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$$

$$\vdash . (1). *11.11.35. \supset$$

$$\vdash : (\exists x, y). \alpha = \iota'x. \beta = \iota'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$$

$$\vdash . (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that

- i) Le lemme de Russel;  
ii) La conjecture de Russel;  
iii) Le théorème de Russel;  
iv) L'hypothèse de Russel;  
v)  $1 + 1 = 2$ .

– FIN –

## DS 7 - sujet \*

THÈMES : ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES, PROJECTEURS ORTHOGONAUX  
(AVEC UN PEU DE VARIABLES ALÉATOIRES)

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

### Exercice 1

#### Variables aléatoire et projecteurs orthogonaux

Soit  $\sigma$  un réel strictement positif. Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes d'espérance nulle et toutes de variance  $\sigma^2$ . On introduit

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

la matrice colonne associée.

Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , de dimension  $k$ , avec  $1 \leq k \leq n$ .

On note  $P$  la matrice, dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , de la projection orthogonale sur  $H$  (pour le produit scalaire canonique).

1. Déterminer, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la valeur de l'espérance  $\mathbb{E}[(PX)_i]$ .
2. Calculer l'espérance  $\mathbb{E}[\|X\|^2]$ , où  $\|X\|$  désigne la norme canonique de  $X$ .

La norme d'une matrice colonne  $X$  est définie comme celle du vecteur associé  $(X_1, \dots, X_n)$ .

3.
  - a) Donner la valeur de la trace de  $P$ .
  - b) Montrer que  $\|PX\|^2 = {}^tXPX$  et en déduire la valeur de  $\mathbb{E}[\|PX\|^2]$ .
  - c) Déterminer la valeur de  $\mathbb{E}[\|(I_n - P)X\|^2]$ .
4. Donner la loi de  $\|X\|^2$  si on suppose que les variables  $X_i$  suivent une loi normale centrée réduite.  
On pourra commencer par donner la loi de  $Y_i = X_i^2/2$ .

### Problème

#### Fonctions matriciellement croissantes

Dans la suite,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes à coefficients réels,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ ,  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Une matrice  $S$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXSX \geq 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad {}^tXSX > 0.$$

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  positives et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  définies positives.

Enfin, on considère sur  $\mathbb{R}^n$  le produit scalaire canonique.

L'objectif de ce problème est d'étudier la notion de fonction matriciellement croissante.

Dans la première partie on définira une relation d'ordre sur les matrices symétriques. Diverses propriétés de cette relation seront utilisées dans les deux parties suivantes.

Dans la seconde partie, on définira ce qu'est une fonction matriciellement croissante (ou décroissante) et on étudiera des exemples de fonctions homographiques et puissances.

La troisième et dernière partie fera appel à une représentation intégrale et permettra de montrer que la fonction logarithme népérien et la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  pour  $\alpha \in ]0; 1[$  sont matriciellement croissantes.

- **Préliminaires**

1. a) Soit  $S \in \mathcal{S}_n$ . Justifier les équivalences entre les énoncés :
  - i) La matrice  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+$  ;
  - ii) Le spectre de  $S$  est inclus dans  $\mathbb{R}^+$  .
  - iii) Il existe  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = {}^tMM$ .
 b) Donner un résultat similaire pour une matrice de  $\mathcal{S}_n^{++}$  .

### Partie I : une relation d'ordre

On munit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  des relations notées  $\leq$  et  $<$ , définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, \quad (S_1 \leq S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et  $\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, \quad (S_1 < S_2 \iff S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$ .

- **Premières propriétés**

2. Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$  et  $S_2 \leq S_1$ , montrer que  $S_1 = S_2$ .
3. Si  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ , montrer que l'on n'a pas nécessairement  $S_1 \leq S_2$  ou  $S_2 \leq S_1$ .
4. Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$ ,  $S_1 \neq S_2$ , a-t-on  $S_1 < S_2$  ?
5. Si  $S, S_1$  et  $S_2$  sont trois matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  telles que  $S_1 \leq S_2$ , comparer les matrices  $S + S_1$  et  $S + S_2$  pour la relation  $\leq$ .

- **Python**

On admet qu'on a une fonction python `SpectreDS` qui prend en argument une matrice  $A$  et renvoie une matrice ligne contenant les valeurs propres de  $A$  dans l'ordre croissant et sans répétition.

- a) Écrire une fonction qui prend en argument une matrice et teste si cette dernière est symétrique.
- b) En déduire un programme qui prend en arguments deux matrices  $S_1$  et  $S_2$  puis renvoie 1, -1 ou 0 suivant si  $S_1 \leq S_2$ ,  $S_1 \geq S_2$  ou ni l'un ni l'autre.

- **Passage à l'inverse**

L'objectif des questions 7 et 8 est d'établir de deux manières différentes la propriété :

$$(\mathcal{P}) : \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_2^{-1} \leq S_1^{-1}.$$

6. — *Preuve 1*

- a) Soit  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$  avec  $S_1 \leq S_2$ . Montrer que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tMS_1M \leq {}^tMS_2M$ .
- b) On suppose dans cette question seulement que  $I_n \leq S$ .  
Que dire des valeurs propres de  $S$ ? En déduire que  $S$  est inversible et  $0_n < S^{-1} \leq I_n$ .
- c) Soient  $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{++})^2$  tel que  $0_n < S_1 \leq S_2$  et  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $S_1 = {}^tMM$ . Montrer que  $I_n \leq {}^t(M^{-1})S_2M^{-1}$ , en déduire que  $S_2$  est inversible et  $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$ .

7. — *Preuve 2*

- a) Soit  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on définit l'application :

$$\varphi_X^S : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ Y & \mapsto 2{}^tXY - {}^tYSY. \end{cases}$$

- i) On identifie  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ . Vérifier que  $\varphi_X^S$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Préciser le gradient et vérifier que  $S^{-1}X$  est l'unique point critique de  $\varphi_X^S$ .
  - ii) Vérifier que pour tout  $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_X^S(S^{-1}X + H) - \varphi_X^S(S^{-1}X) = -{}^tHSH$ .
  - iii) En déduire que  $\varphi_X^S$  admet en  $S^{-1}X$  un maximum qui vaut  ${}^tXS^{-1}X$ .
- b) On considère maintenant  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  vérifiant  $S_1 \leq S_2$ .  
Montrer que pour tout  $X$  et tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi_X^{S_1}(Y) \geq \varphi_X^{S_2}(Y)$ . En déduire que  $S_2^{-1} \leq S_1^{-1}$ .
  - c) A-t-on :

$$(\widetilde{\mathcal{P}}) : \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad S_1 < S_2 \Rightarrow S_2^{-1} < S_1^{-1} \quad ?$$

### Partie II : Fonction matricielle

Lorsque  $F$  est une application définie sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , on dit que  $F$  est croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad A \leq B \Rightarrow F(A) \leq F(B).$$

On dira de même que  $F$  est décroissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  lorsque  $-F$  est croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . On dit aussi que  $F$  est strictement croissante (ou décroissante) en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Par exemple, la propriété ( $\mathcal{P}$ ) se traduit par la décroissance de l'application  $F : M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

### • Décomposition spectrale

8. Soient  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont  $S$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $u$  et  $E_1, E_2, \dots, E_p$  les sous-espaces propres de  $u$  respectivement associés. On suppose les valeurs propres classées :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p.$$

Si  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $p_i(x)$  le projeté orthogonal de  $x$  sur  $E_i$ . La matrice de  $p_i$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $P_i$ .

a) Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , exprimer  $E_i^\perp$  à l'aide des espaces propres  $E_k$ .

b) Justifier que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $P_i P_j = 0_n$ .

c) Montrer que  $\sum_{i=1}^p P_i = I_n$  et  $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ .

La décomposition de  $S$  obtenue est dite *décomposition spectrale* de  $S$ .

d) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , comment décomposer la matrice  $S^k$ ?

### 9. Comment calculer la décomposition avec python?

Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on pose le polynôme

$$L_i(x) = \frac{1}{r_i} \prod_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} (x - \lambda_j) \quad \text{où} \quad r_i = \prod_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} (\lambda_i - \lambda_j).$$

a) Vérifier que  $L_i(S) = P_i$ .

b) En utilisant la fonction `SpectreDS` décrite précédemment, écrire un programme qui prend en argument  $S$  et renvoie  $P_1$  (le projecteur associé à la première valeur propre).

Si  $S$  appartient à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et admet la décomposition spectrale  $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ , on définit, lorsque  $f$  est une application de  $\mathbb{R}_*^+$

dans  $\mathbb{R}$ , la matrice  $\tilde{f}(S) = \sum_{i=1}^p f(\lambda_i) P_i$ .

On peut ainsi considérer l'application  $\tilde{f}$  définie sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $\tilde{f} : S \mapsto \tilde{f}(S)$ .

### • Composition

10. a) Montrer que, pour tout  $S$  appartenant à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{f}(S)$  appartient à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et donner la décomposition spectrale de  $\tilde{f}(S)$  lorsque  $f$  est strictement monotone.

b) Soient  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  deux applications strictement monotones. Montrer que :  $\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ .

### • Exemple : Cas d'une fonction homographique

Lorsque  $(a, b, c, d)$  appartient à  $\mathbb{R}^4$  avec  $c > 0$ ,  $d > 0$  et  $bc - ad \neq 0$ , on considère l'application  $h : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}$ .

11. a) On pose  $g : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto cx + d$ . Vérifier que  $\tilde{g}$  est croissante sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

b) Après avoir vérifié que pour tout réel  $x > 0$ ,  $h(x) = \frac{bc - ad}{c(cx + d)} + \frac{a}{c}$ , montrer la monotonie de  $\tilde{h}$  sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

### • Exemple : Fonctions puissances

12. Dans cette question, on prend  $n = 2$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ , on pose

$$p_\alpha : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et pour tout  $x$  réel, soit  $A(x)$  et  $B(x)$  les matrices définies par :

$$A(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{ch} x} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

a) En remarquant que  $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$ , montrer que pour tout  $x$  réel,  $B(x) \leq A(x)$ .

b) Pour  $x \neq 0$ , déterminer explicitement la décomposition spectrale de  $A(x)$ . Vérifier que les matrices de projection obtenues sont indépendantes de  $x$ .

- c) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\widetilde{p}_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$ .  
d) Expliciter pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la matrice  $\widetilde{p}_\alpha(B(x))$ .  
e) Calculer  $\zeta(x) = \det[\widetilde{p}_\alpha(A(x)) - \widetilde{p}_\alpha(B(x))]$ , puis vérifier l'équivalent au voisinage de 0 :  $\zeta(x) \sim \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} x^2$ .  
f) En déduire que pour  $\alpha > 1$ ,  $\widetilde{p}_\alpha$  n'est pas croissante.

### Partie III : Intégrales de matrices

Pour une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$  si  $f$  est continue sur  $I$  et l'intégrale sur  $I$  de  $f$  existe.

Soit  $A$  une application d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui à  $t$  associe la matrice  $A(t)$  dont le coefficients d'indice  $(i, j)$ , est  $a_{ij}(t)$ . Si pour tout  $(i, j)$  de  $[1, n]^2$ , l'application  $t \mapsto a_{ij}(t)$  est intégrable sur  $I$ , on note  $\int_I A(t) dt$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le coefficient d'indice  $(i, j)$ , est le réel  $\int_I a_{ij}(t) dt$ .

On suppose dans la suite que la matrice  $S$  est symétrique définie positive. On note  $S = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$ , sa décomposition spectrale.

13. a) Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$  une application telle que pour tout  $(i, j)$  de  $[1, n]^2$ ,  $t \mapsto a_{ij}(t)$  est intégrable sur  $I$ . Montrer que pour toute matrice colonne  $X$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $t \mapsto {}^t X A(t) X$  est intégrable sur  $I$  et :

$$\int_I {}^t X A(t) X dt = {}^t X \left( \int_I A(t) dt \right) X.$$

- b) Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  intégrable sur  $I$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Justifier l'existence de  $\int_I f(t) M dt$  et montrer que :

$$\int_I f(t) M dt = \left( \int_I f(t) dt \right) M.$$

14. Soient  $\alpha \in ]0; 1[$  et  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt$ .

- a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $F(x)$  existe. On définit alors la fonction  $F : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto F(x) \in \mathbb{R}$ .  
b) Montrer qu'il existe une constante  $C$  strictement positive telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $F(x) = Cx^\alpha$ .  
c) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}_*^+$ , la matrice  $S^{-1} + tI_n$  est inversible et

$$(S^{-1} + tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i t} P_i.$$

- d) En déduire  $\tilde{F}(S) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (S^{-1} + tI_n)^{-1} dt$ .

- e) Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telles que  $A \leq B$ . Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_*^+, \quad {}^t X (A^{-1} + tI_n)^{-1} X \leq {}^t X (B^{-1} + tI_n)^{-1} X.$$

- f) En déduire que  $\tilde{F}$  est croissante, puis que pour  $\alpha \in ]0; 1[$ , la fonction  $\widetilde{p}_\alpha$  introduite à la question 12 est croissante.

15. a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ ,

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} \right) dt = \ln x.$$

- b) En déduire  $\ln S = \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} I_n - (S + tI_n)^{-1} \right) dt$ .

- c) Conclure en montrant que la fonction logarithme matricielle  $\tilde{\ln}$  est croissante.

**Bonus** Que prouve le grand mathématicien britannique Bertrand Russel dans ces quelques lignes ?

\*54.43.  $\vdash : \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54.26. \supset \vdash : \alpha = \iota^x. \beta = \iota^y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . x \neq y.$

[\*51.231]  $\equiv . \iota^x \cap \iota^y = \Lambda.$

[\*13.12]  $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (1)

$\vdash . (1). *11.11.35. \supset$

$\vdash : (\exists x, y). \alpha = \iota^x. \beta = \iota^y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$  (2)

$\vdash . (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that

i) Le lemme de Russel;

ii) La conjecture de Russel;

iii) Le théorème de Russel;

iv)  $1 + 1 = 2$ .

– FIN –



## DS 7 A - solution

Bonus pour chaque coquille, fote d'orthographe trouvée ou remarque pertinente.

### Exercice 1

Entraînement aux calculs

1. On a

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0.$$

On peut aussi noter que la dérivée de  $\sin^2$  est  $2 \sin \cos$  pour avoir une primitive.

Vérifier ensuite par une intégration par partie que

$$\langle e_1, \cos \rangle = 0.$$

2. On a déjà le fait que sinus et cosinus sont orthogonaux. De plus,

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt + \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi,$$

on établit que

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)^2 dt = \pi.$$

D'où le résultat, on renormalisant.

3. Notons  $F$  le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions sinus et cosinus. Ainsi toute fonction  $v \in F$  s'écrit sous la forme

$$v = a \cos + b \sin$$

et on a alors

$$\|e_1 - v\|^2 = \int_0^{2\pi} (t - a \cos(t) - b \sin(t))^2 dt.$$

D'après la caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de la norme, le minimum est bien défini et il est atteint (uniquement) lorsque  $v$  correspond au projeté orthogonal de  $e_1$  sur  $F$ .

Or d'après la formule du projeté orthogonal avec la base orthonormée de  $F$  donnée par  $(\sin/\sqrt{\pi}, \cos/\sqrt{\pi})$ , on a

$$\begin{aligned} p_F(e_1) &= \left\langle e_1, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} + \left\langle e_1, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= \langle e_1, \cos \rangle \frac{\cos}{\pi} + \langle e_1, \sin \rangle \frac{\sin}{\pi} \\ p_F(e_1) &= -2 \sin. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \inf_{v \in F} \|e_1 - v\|^2 &= \|e_1\|^2 - \|p_F(e_1)\|^2 \\ &= \int_0^{2\pi} t^2 dt - \int_0^{2\pi} 4 \sin(t)^2 dt \\ \inf_{v \in F} \|e_1 - v\|^2 &= \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi. \end{aligned}$$

### Exercice 2

adapté d'un sujet ECRICOME

1.a) La matrice  $A$  est de type 0 si et seulement si  ${}^t A = A^0 = I_n$ , si et seulement si

$$A = I_n.$$

La matrice  $A$  est de type 1 si et seulement si  ${}^t A = A$ , si et seulement si  $A$  est symétrique.

1.b) Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est inversible, on sait que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

On choisit  $a, b, c, d$  afin que  $ad - bc = -1$  de sorte que

$${}^t A = A^{-1} \iff \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Par exemple, une matrice de type  $-1$  est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (a = d = 0, b = c = 1)$$



On constate qu'une matrice est de type  $-1$  si et seulement si c'est une matrice orthogonale.

2.a) À l'aide de

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \cos(x) \sin(y) - \sin(x) \cos(y),$$

on établit l'égalité :

$$N(x + y) = N(x)N(y).$$

Par récurrence, on montre que  $N(x)^k = N(kx)$ . Pour l'hérédité, on utilise la relation précédente :

$$\begin{aligned} N(x)^{k+1} &= N(x)^k N(x) = N(kx) \cdot N(x) = N(kx + x) \\ &= N((k+1)x). \end{aligned}$$

2.b) La matrice  $N(x)$  est de type  $n$  si et seulement si

$${}^t N(x) = N(x)^n = N(nx).$$

En identifiant, les coefficients, c'est équivalent à

$$\cos(x) = \cos(nx) \quad \text{et} \quad -\sin(x) = \sin(nx).$$

Il existe  $k, k' \in \mathbb{Z}$  tels que

$$x = -nx + 2k\pi \quad \text{et} \quad x = -nx + 2k'\pi.$$

D'où  $(n+1)x = 2k\pi = 2k'\pi$ .

Ce qui donne  $k = k'$  et

$$x = \frac{2k}{n+1}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**3.a)**

```
def test(A,B):
    [n,p]=np.size(A)
    if [n,p]!=np.size(B):
        return 0
    # matrices de taille distinctes
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i,j]!=B[i,j]:
                return 0
    return 1
```

**3.b)** Donnons une solution sans utiliser de fonctions préprogrammées en python :

```
def transposee(A):
    [n,p]=np.size(A)
    B=np.size(p,n)
    for i in range(p):
        for j in range(n):
            B[i,j]=A[j,i]
    return B

def puissance(A,n):
    B=A
    for i in range(1,n-1):
        B=np.dot(A,B)
    return B

def typen(A,n):
    P=puissance(A,n)
    tA=transposee(A)
    return test(A,B)
```

**4.a)** On a

$$A^{n^2} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = {}^t(A^n) = {}^t({}^tA) = A.$$

**4.b)** Ensuite

$$\begin{aligned} B^n &= (A^n)^{n+1} = A^{n^2+n} \\ &= A^{n^2} \cdot A^n = A \cdot A^n = A^{n+1} = B. \end{aligned}$$

De plus

$${}^tB = ({}^tA)^{n+1} = (A^n)^{n+1} = (A^{n+1})^n = B$$

La matrice B est symétrique.

**4.c)** Le polynôme  $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$  est annulateur de B.

Ainsi

$$\text{Sp}(B) \subset \text{Racines}(x^n - x) \subset \{0; \pm 1\}$$

(on rajoute  $-1$  si  $n$  est impair).

**4.d)** D'une part

$${}^tVBV = {}^tV(-V) = -\|V\|^2.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} {}^tVBV &= {}^tVA^{n+1}V = {}^tVA^n \cdot AV \\ &= {}^tC^tA \cdot AV \quad \text{car } A \text{ est de type } n \\ &= {}^t(AV)AV = \|AV\|^2. \end{aligned}$$

$$\underbrace{\|AV\|^2}_{\geq 0} = -\underbrace{\|V\|^2}_{\leq 0}.$$

Nécessairement  $\|V\| = 0$ , puis  $V = 0_{n,1}$ . Absurde pour un vecteur propre. Le réel  $-1$  n'est pas valeur propre.

**4.e)** La matrice B est symétrique, donc d'après le théorème spectral, il existe D diagonale, P orthogonale telles que

$$B = PDP^{-1}.$$

Or on a vu que  $\text{Sp}(B) \subset \{0; 1\}$ . Les coefficients diagonaux de D sont donc dans  $\{0; 1\}$ . En particulier

$$D^2 = D \quad \text{puis} \quad B^2 = PD^2P^{-1} = B.$$

La matrice B est donc la matrice d'un projecteur. De plus, B est symétrique, c'est la matrice d'un projecteur orthogonal.

**5.a)** Soit  $X \in E_B$ . On a donc  $BX = 0_{n,1}$ . Ainsi

$$AX = A^{n^2}X = A^{n^2-(n+1)} \cdot \underbrace{A^{n+1}X}_{=BX=0_{n,1}} = 0_{n,1}$$

(précisons que  $n^2 - (n+1) \geq 0$  pour  $n \geq 1$ ). D'où  $X \in E_B$ .

De plus, si  $X \in E_A$ ,

$$BX = A^n \cdot \underbrace{AX}_{=0_{n,1}} = 0_{n,1} \quad \text{puis} \quad X \in E_B.$$

Par double inclusion  $E_A = E_B$ .

**5.b)** Soit  $X \in F_B$ . Il existe donc  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que  $BX = X$ .

D'où

$$X = A^{n+1}Y = A(A^nY) \in F_A.$$

D'où l'inclusion  $F_B \subset F_A$ .

Or la formule du rang et la question précédente donnent

$$\begin{aligned} \dim F_B &= n - \dim E_B \\ &= n - \dim E_A = \dim F_A \end{aligned}$$

D'où

$$F_B = F_A.$$

**6.** Soit  $U \in F_A$ . Alors  $U \in F_B$ . Comme B est un projecteur  $BU = U$ . Ensuite

$$\begin{aligned} \|AU\|^2 &= {}^tU^tAAU = {}^tUA^nAU = {}^tUBU \\ &= {}^tU^tBBU \quad (B \text{ project. orthogonal}) \\ &= {}^tUU = \|U\|^2. \end{aligned}$$

**7.** Notons que

$${}^tA = A^n \text{ donne } A = ({}^tA)^n,$$

puis

$${}^tAA = {}^tA({}^tA)^n = {}^t(A^{n+1}) = {}^tB = B.$$

Or A est inversible, B l'est aussi. Le réel 0 n'appartient pas au spectre de B qui est donc semblable à  $I_n$ . D'où  $B = I_n$  et

$${}^tAA = I_n, \quad {}^tA = A^{-1}.$$

La matrice A est de type  $-1$ .

**7.** On a donc

$${}^tA = A^n \quad \text{et} \quad {}^tA = A^{n+1} = B.$$

D'où  $A = {}^tB$  est une matrice de projection orthogonale car B l'est.

**Exercice 3**  
Maximum sur un nombre aléatoire de v.a

1. Voir exercice du cours.

2.a) L'intégrande est continue sur  $[0; +\infty[$ . On a une intégrale généralisée en  $+\infty$ . Or, d'après les croissances comparées :

$$\frac{1}{e^u + a} = o_0\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{u^2} \geq 0.$$

L'intégrale de Riemann  $\int_1^{+\infty} 1/u^2 du$  étant convergente,  $J$  est bien convergente par le critère de négligeabilité.

2.b) Le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotone

$$v = ae^{-u} \quad dv = -ae^{-u} du$$

donne

$$aJ = \int_0^{+\infty} \frac{ae^{-u}}{1 + ae^{-u}} du = - \int_a^0 \frac{dv}{1+v} = [\ln(1+v)]_a^0$$

Finalement  $J = \frac{\ln(1+a)}{a}.$

3.a)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def geo(s):
    k=1
    while rd.random()>s:
        k+=1
    return k
```

3.b) On trouve une loi exponentielle de paramètre  $b$ . Voir méthode inversion (cours).

3.c) Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur  $]0; 1[$ . Notons que  $Z$  et

$$W = \max(-b \ln(U_1), \dots, -b \ln(U_N)) \\ = -b \ln(\min(U_1, \dots, U_N))$$

ont même loi. Pour simuler  $Z$ , on peut se contenter de simuler  $W$ . Ce qui donne le code :

```
def sim(b,s):
    N=geo(s)
    U=rd.random(N)
    U=-np.log(U)/b
    return min(U)
```

4. Soient  $t \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[N=j]}(Z \leq t) &= \mathbf{P}(Y_1 \leq t, Y_2 \leq t, \dots, Y_j \leq t) \\ &= \mathbf{P}(Y_1 \leq t, Y_2 \leq t, \dots, Y_j \leq t) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \prod_{i=1}^j \mathbf{P}(Y_i \leq t) \quad (\text{indépendance}) \\ &= F_{Y_1}(t)^j \quad (\text{égalité en loi}) \end{aligned}$$

Comme  $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$ , on a pour  $t \geq 0$

$$\mathbf{P}_{[N=j]}(Z \leq t) = (1 - e^{-bt})^j$$

et pour  $t < 0$ , on trouve 0.

5.a) Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $([N = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$ . Pour  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq t) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}_{[N=j]}(Z \leq t) \mathbf{P}(N = j) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - e^{-bt})^j s(1-s)^{j-1} \\ &= (1 - e^{-bt}) s \sum_{j=1}^{+\infty} ((1 - e^{-bt})(1-s))^{j-1} \\ &= \frac{(1 - e^{-bt}) s}{1 - (1 - e^{-bt})(1-s)} \\ \mathbf{P}(Z \leq t) &= \frac{s(1 - e^{-bt})}{s + (1-s)e^{-bt}}. \end{aligned}$$

Pour  $t \leq 0$ , on a directement

$$\mathbf{P}(Z \leq t) = 0.$$

On constate que la fonction de répartition de  $Z$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  par les théorèmes généraux. De plus, en tant que fonction de répartition, elle est continue à droite en 0 et

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} F_Z(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0 = F_Z(0).$$

On a donc la continuité en 0. En résumé,  $F_Z$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et continue sur  $\mathbb{R}$ . La variable  $Z$  est à densité et une densité est obtenue en dérivant là où cela est possible.

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f'_Z(t) = \begin{cases} \frac{bse^{-bt}}{(s + (1-s)e^{-bt})^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Une densité  $f_Z$  est alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = \begin{cases} \frac{bse^{-bt}}{(s + (1-s)e^{-bt})^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

6. Justifier que la variable positive  $Z$  admet une espérance pour pouvoir appliquer la question 1. La fonction  $t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto t f_Z(t)$  est continue sur  $]0; +\infty[$ , prolongeable par continuité en 0. On a donc une intégrale généralisée en  $+\infty$ . Or

$$t f_Z(t) \sim_{+\infty} \frac{bs}{s^2} t e^{-bt} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

En reprenant la question 2, on en déduit la convergence. L'espérance de  $Z$  existe.

On sait alors que

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} 1 - F_Z(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{se^{bt} + 1 - s} du.$$

Pour utiliser la question 2, on pose  $a = (1-s)/s$  et on écrit

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{s} J = \frac{1}{s} \frac{\ln(1+a)}{a}.$$

Ce qui donne bien le résultat demandé.

**7.a)** La fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_*^+$  par les théorèmes généraux. De plus,

$$g(t) \sim_0 \frac{t \cdot 1}{t} = 1.$$

Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 1 = g(0).$$

On a la continuité en 0 et par extension sur tout l'ensemble de définition de  $g$ .

De plus, par les croissances comparées,  $g$  est de limite finie (nulle même) en  $+\infty$ . En rajoutant la propriété de continuité, cela suffit à justifier que  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

**7.b)** Reconnaître une somme géométrique.

**8.** On peut faire le calcul par intégration par partie mais on peut être plus efficace en utilisant une densité de la loi exponentielle de paramètre  $k+1$ .

$$\int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt = \frac{1}{k+1} \int_0^{+\infty} f_X(t) dt$$

où  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(k+1)$ . On sait que la loi exponentielle admet une espérance, l'intégrale est donc convergente et on a sa valeur

$$\int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt = \frac{1}{k+1} \mathbf{E}(X) = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

**9.** Par linéarité d'intégrales convergentes

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t) dt &= \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Or  $g$  est bornée (soit  $M$  une borne).

$$\left| \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement

$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par passage à la limite dans la première égalité

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**10.** Faire le changement de variable  $s = e^{-t}$  pour utiliser la question précédente.

### Problème Fonctions matriciellement croissantes

Voir le corrigé du sujet \*. Seule la question 3 est différente.

**3.a)** Soit  $S$ , une matrice symétrique non nulle mais de trace nulle. Raisonnons par l'absurde en supposant que  $S$  est symétrique définie positive. Comme  $S$  est diagonalisable (théorème spectral), elle est semblable à une matrice diagonale  $D$  dont les coefficients sont positifs (car le spectre de  $S$  est inclus dans  $\mathbb{R}^+$ ). Par invariance de la trace par similitude, la trace de  $S$  est aussi la trace de  $D$  qui est donc nulle. On en déduit les coefficients de  $D$  sont nécessairement nuls. la matrice  $D$  est la matrice nulle, la matrice  $S$  l'est alors aussi. Absurde.

Finalement,  $S$  ne peut être positive.

**3.b)** On constate que  $S_2 - S_1$  et  $S_1 - S_2$  sont bien symétriques, non nulles et de traces nulles. Dès lors, ces matrices ne peuvent être positives. On a ni  $S_1 \leq S_2$ , ni  $S_2 \leq S_1$ .

## DS 7\* - solution

Bonus pour chaque coquille, fote d'orthographe trouvée ou remarque pertinente.

**Exercice 1**  
v.a et projecteur

1. Notons  $P = (p_{ij})_{i,j}$ . Pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  fixé

$$(PX)_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j$$

et par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}((PX)_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \underbrace{\mathbf{E}(X_j)}_{=0} = 0.$$

2. À l'aide de la linéarité de l'espérance et le fait que les variables sont d'espérance nulle

$$\mathbf{E}(\|X\|^2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i^2) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = n\sigma^2.$$

3.a) Soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $H$ . On a donc  $P = \text{Mat}_{\text{can}}(p)$ . La matrice de  $p$  adaptée à la décomposition  $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$  est  $\text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ . Par invariance de la trace par similitude

$$\text{Tr}(P) = \text{Tr}(\text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)) = k.$$

3.b) Comme  $P$  est la matrice d'un projecteur orthogonal dans une base orthonormée, on a  ${}^t P = P = P^2$ . Dès lors

$$\begin{aligned} \|PX\|^2 &= {}^t(PX)PX = {}^tX^tPPX = {}^tXP^2X = {}^tXPX \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ii} X_i^2 + 2 \sum_{i < j} p_{ij} X_i X_j. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance et indépendance des variables  $X_i, X_j$  pour  $i \neq j$ , on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|PX\|^2) &= \sum_{i=1}^n p_{ii} \mathbf{E}(X_i^2) + 2 \sum_{i < j} p_{ij} \overbrace{\mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j)}^{=0} \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n p_{ii} \\ \mathbf{E}(\|PX\|^2) &= \sigma^2 \text{Tr}(P) = k\sigma^2. \end{aligned}$$

3.c) Comme  $P$  est une matrice d'une projection orthogonale sur  $H$ ,  $I_n - P$  est celle sur  $H^\perp$ . Ainsi les matrices colonnes  $(I_n - P)X$  et  $PX$  sont orthogonales. D'après le théorème de Pythagore

$$\|(I_n - P)X\|^2 + \|PX\|^2 = \|(I_n - P)X + PX\|^2 = \|X\|^2.$$

Avec les calculs précédents :  $\mathbf{E}(\|(I_n - P)X\|^2) = (n - k)\sigma^2$ .

4. On a par définition de la norme euclidienne

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n Y_i^2$$

Or  $Y_i$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_{Y_i}(t) = 0$  si  $t \leq 0$  et pour  $t > 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(t) &= \mathbf{P}(Y_i \leq t) = \mathbf{P}(X_i^2 \leq 2t) \\ &= \mathbf{P}(-\sqrt{2t} \leq X_i \leq \sqrt{2t}) = \Phi(\sqrt{2t}) - \Phi(-\sqrt{2t}) \\ F_{Y_i}(t) &= 2\Phi(\sqrt{2t}) - 1. \end{aligned}$$

La fonction  $F_{Y_i}$  est constante sur  $\mathbb{R}^-$ , donc  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_*^-$ . Par composition,  $F_{Y_i}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ . En tant que fonction de répartition  $F_{Y_i}$  est continue à droite en 0

$$F_{Y_i}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} F_{Y_i}(0) = 0$$

et  $F_{Y_i}$  étant nulle sur  $\mathbb{R}^-$ ,

$$F_{Y_i}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{\quad} 0 = F_{Y_i}(0).$$

Ce qui prouve la continuité en 0. Résumons,  $F_{Y_i}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $Y_i$  est une variable à densité et une densité s'obtient par dérivation (là où cela est possible)

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_*^+, \quad f_{Y_i}(t) &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}} \Phi'(\sqrt{2t}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-t} = \text{cste. } t^{1/2-1} e^{-t} \end{aligned}$$

et pour  $t \in \mathbb{R}^-$ ,  $f_{Y_i}(t) = 0$ . On reconnaît une densité d'une loi  $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ . Ainsi

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad Y_i \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Par indépendance des variables  $Y_i$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^n Y_i \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Enfin, par transformation affine  $\|X\|^2$  est une variable à densité avec pour densité

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n/2)} (2t)^{n/2-1} e^{-2t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

**Problème**  
adapté d'un sujet ESSEC 2009

**1.a,b)** Voir cours.

**2.** On a donc

$$\text{Sp}(S_2 - S_1) \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \text{Sp}(S_2 - S_1) \subset \mathbb{R}^-.$$

Car les valeurs propres d'une matrice  $-A$  sont les opposés des valeurs propres de  $A$ . Nécessairement

$$\text{Sp}(S_2 - S_1) \subset \{0\}.$$

Or la matrice  $S_2 - S_1$  est symétrique réelle, donc diagonalisable. Cette matrice est donc semblable à la matrice diagonale

$$\text{diag}(0, 0, \dots, 0) = 0_n.$$

C'est la matrice nulle. Finalement

$$S_2 = S_1.$$

**3.** On peut par exemple prendre

$$S_1 = \text{Diag}(-1, 1, \dots, 1) \quad \text{et} \quad S_2 = 0_n$$

de sorte que les spectres de  $S_2 - S_1$  et  $S_1 - S_2$  contiennent à la fois une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Ces matrices n'appartiennent donc pas à  $\mathcal{S}_n^+$ .

**4.** Posons  $E$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constituée de 0 sauf en position  $(1, 1)$  où le coefficient vaut 1. Soit  $S_1 = I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $S_2 = I_n + E$  de sorte que

$$S_1 \neq S_2 \quad \text{et} \quad S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

La réponse est donc négative.

**5.** On a

$$(S_2 + S) - (S_1 + S) = S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

Donc  $S_1 + S \leq S_2 + S$ .

**Python a)**

```
def test_sym(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    if n!=p:
        return 0
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            if A[i,j]!=A[j,i]:
                return 0
    return 1
```

**Python b)**

```
def comparaison(S1,S2):
    # on teste d'abord si les matrices sont
    # symétriques et de même taille
    if test_sym(S1)*test_sym(S2)==0:
        return 0
    [n,p]=shape(S1)
    [m,p]=shape(S2)
    if m!=n:
        return 0
    l=SpectreDS(S2-S1)
    p=len(l)
```

```
# Pour tester si le spectre est de signe
# constant, on compare seulement le
# premier et le dernier car la matrice
# contenant le spectre est triée
if l[0]*l[p-1] < 0:
    return 0
if l[0]>=0:
    return 1
if l[0]<0:
    return -1
```

👁 Pour construire la fonction SpectreDS, on peut trier les valeurs propres de la matrice obtenue avec `eigs(A)[0]`. Ensuite, pour gérer aussi les erreurs d'arrondis, on ne garde que les valeurs qui sont distinctes à  $\varepsilon = 10^{-6}$ -près.

**6.a)** On a  ${}^tMS_iM$  qui reste bien symétrique. En utilisant le préliminaire question 1, la condition  $S_1 \leq S_2$ ,  $S_2 - S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  permet d'affirmer l'existence de  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$S_2 - S_1 = {}^tQQ$$

puis

$$\begin{aligned} {}^tMS_2M - {}^tMS_1M &= {}^tM(S_2 - S_1)M \\ &= {}^tM{}^tQQM \\ &= {}^t(QM)QM \\ {}^tMS_2M - {}^tMS_1M &= {}^t\tilde{M}\tilde{M} \quad \text{où} \quad \tilde{M} = QM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

De nouveau, la question 1 avec l'implication **iii)**  $\Rightarrow$  **i)** donne

$${}^tMS_2M - {}^tMS_1M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

D'où  ${}^tMS_2M \geq {}^tMS_1M$ .

**6.b)** D'après le théorème spectral, on peut considérer  $D$  diagonale et  $P$  orthogonale telles que

$$S = {}^tPDP.$$

D'où

$$S - I_n = {}^tPDP - {}^tPP = {}^tP(D - I_n)P.$$

On en déduit en particulier que

$$\text{Sp}(S - I_n) = \{\lambda - 1; \lambda \in \text{Sp}(S)\}.$$

Or  $S - I_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , le spectre est positif. D'où

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(S), \quad \lambda \geq 1.$$

C'est-à-dire  $\text{Sp}(S) \subset [1; +\infty[$ .

Comme  $0 \notin \text{Sp}(S)$ , la matrice  $S$  est inversible.

Or pour  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \in \text{Sp}(S^{-1}) \iff \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(S).$$

On en déduit que

$$\text{Sp}(S^{-1}) \subset ]0; 1].$$

En reprenant la démarche du début de la question, cela implique

$$0 < S^{-1} \leq I_n.$$

**6.c)** On a

$$S_1 \leq S_2$$

puis 
$$\underbrace{{}^t(M^{-1})S_1M}_{=I_n} \leq {}^t(M^{-1})S_2M^{-1} \quad (\text{q6.a})$$

avec  $S = (M^{-1})S_2M^{-1}$ , la question 6.b) donne l'inversibilité de  $S$  avec

$$0_n < S^{-1} \leq I_n,$$

c'est-à-dire  $MS_2^{-1}tM \leq I_n.$

Utilisons de nouveau la question 6.a) avec  $M \leftarrow M^{-1}$ . Soit

$$\begin{aligned} M^{-1}(MS_2^{-1}tM)(tM)^{-1} &\leq M^{-1} \cdot I_n \cdot tM \\ S_2^{-1} &\leq S_1^{-1}. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

**7.a)i)** Explicitons  $\varphi_X^S(Y)$  où  $S = (s_{ij})$ ,  $Y = (y_k)$ ,  $X = (x_k)$  :

$$\begin{aligned} \varphi_X^S(Y) &= 2{}^tXY - {}^tYSY \\ &= 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i s_{ij} y_j \\ &= 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i^2 s_{ii} - 2 \sum_{i < j} y_i s_{ij} y_j. \end{aligned}$$

Avec cette nouvelle expression, on constate que  $\varphi_X^S$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

Fixons  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et isolons les termes contenant  $y_k$ .

$$\begin{aligned} \varphi_X^S(Y) &= 2x_k y_k - y_k^2 s_{kk} - 2y_k \sum_{j=k+1}^n s_{kj} y_j - 2 \left( \sum_{i=1}^{k-1} y_i s_{ij} \right) y_k \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

La  $k$ -ième dérivée partielle (on dérive par rapport à  $y_k$ )

$$\begin{aligned} \partial_k \varphi_X^S(Y) &= 2x_k - 2y_k s_{kk} - 2 \sum_{j=k+1}^n s_{kj} y_j - 2 \sum_{i=1}^{k-1} y_i s_{ik} \\ &= 2 \left( x_k - \sum_{j=1}^n y_j s_{kj} \right) \\ &= 2([X]_k - [SY]_k). \end{aligned}$$

En gardant l'identification entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , il vient

$$\nabla \varphi_X^S(Y) = 2(X - SY).$$

Dès lors,  $Y$  est point critique si et seulement si

$$2(X - SY) = a_{n,1} \quad \text{ssi} \quad Y = S^{-1}X.$$

**7.a)ii)** Soit  $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} &\varphi_X^S(S^{-1}X + H) - \varphi_X^S(S^{-1}X) \\ &= 2{}^tX(S^{-1}X + H) - {}^t(S^{-1}X + H)S(S^{-1}X + H) \\ &\quad - 2{}^tXS^{-1}X + {}^t(S^{-1}X)S(S^{-1}X) \\ &= 2{}^tXH - {}^t(S^{-1}X)SH - {}^tHS(S^{-1}X) - {}^tHSH \\ &= 2{}^tXH - {}^tX{}^t(S^{-1})SH - {}^tHX - {}^tHSH \\ &= {}^tXH - {}^tX{}^t(S^{-1})SH - {}^tHSH \quad \text{car } {}^tHX = {}^tXH. \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad {}^tX{}^t(S^{-1})SH = {}^tX({}^tS)^{-1}SH = {}^tXS^{-1}SH = {}^tXH.$$

Finalement, on a plus simplement :

$$\varphi_X^S(S^{-1}X + H) - \varphi_X^S(S^{-1}X) = -{}^tHSH.$$

**7.a)iii)** En reprenant la question 1.b, il existe  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que

$$S = {}^tMM.$$

Ainsi

$$\varphi_X^S(S^{-1}X + H) - \varphi_X^S(S^{-1}X) = -{}^t(MH)MH = -\|MH\|^2$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme canonique sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On en déduit que

$$\varphi_X^S(S^{-1}X + H) - \varphi_X^S(S^{-1}X) \leq 0$$

avec égalité si et seulement si

$$\|MH\| = 0 \iff MH = 0_{n,1} \iff H = 0_{n,1}$$

car  $M$  est inversible. Ce qui conclut.

**7.b)** Justifions que si  $S_1 \leq S_2$  alors

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tYS_1Y \leq {}^tYS_2Y \quad (\star)$$

Soit  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$${}^tYS_2Y - {}^tYS_1Y = {}^tY(S_2 - S_1)Y.$$

$S_2 - S_1 = {}^tMM$  avec  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  (question 1b). D'où  $(\star)$

$${}^tYS_2Y - {}^tYS_1Y = {}^t(MY)MY \geq 0.$$

En prenant maintenant l'opposé de  $(\star)$  et en ajoutant  $2X{}^tY$  à chaque membre, on obtient

$$\varphi_X^{S_1}(Y) \geq \varphi_X^{S_2}(Y).$$

• D'après ce qui précède, le maximum de  $\varphi_X^{S_1}$  est plus grand que celui de  $\varphi_X^{S_2}$ , soit :

$${}^tXS_1^{-1}X \geq {}^tXS_2^{-1}X.$$

On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X \geq 0.$$

Justifions que cela implique que  $S_1^{-1} - S_2^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$ , ce qui équivaut encore à

$$\text{Sp}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) \subset \mathbb{R}_*^+.$$

Soient  $\lambda \in \text{Sp}(S_1^{-1} - S_2^{-1})$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$  tels que

$$(S_1^{-1} - S_2^{-1})X = \lambda X.$$

$$\text{D'où} \quad \lambda \|X\|^2 = \lambda {}^tXX = {}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X \geq 0.$$

Comme  $\|X\| > 0$ , on a bien  $\lambda \geq 0$ .

**7.c)** Oui, il suffit de reprendre la démonstration précédente avec des inégalités strictes.

**8.a)** Dans le cas d'un endomorphisme symétrique, les espaces propres sont en somme directe et orthogonaux. Ainsi

$$\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_j \subset E_i^\perp.$$

Or  $u$  est diagonalisable, la somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de  $\mathbb{R}^n$ , d'où

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p \dim E_j = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim E_i = \dim E_i^\perp.$$

D'où l'égalité  $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_j = E_i^\perp$ .

**8.b)** Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Le vecteur  $p_j(x)$  appartient à  $E_j$ . En particulier  $p_j(x) \in E_i^\perp$ . Comme  $p_i$  est le projecteur orthogonal sur  $E_i$

$$p_i \circ p_j(x) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

D'où  $P_i P_j = 0_n$ .

**8.c)** On sait que  $u$  est diagonalisable, donc :

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  tel que

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

Comme les espaces propres sont orthogonaux, on a pour tout indice  $i$ ,  $p_i(x) = x_i$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_p(x).$$

C'est-à-dire matriciellement

$$I_n = P_1 + P_2 + \dots + P_p.$$

De plus,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^p u(p_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i p_i(x) \quad \text{car } p_i(x) \in E_i. \end{aligned}$$

On en déduit  $S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_p P_p$ .

**8.d)** Par récurrence en utilisant la 8.b), montrer que

$$S^k = \lambda_1^k P_1 + \lambda_2^k P_2 + \dots + \lambda_p^k P_p.$$

**9.a)** À l'aide de la question précédente et par linéarité, on montre que pour tout polynôme  $Q$

$$Q(S) = Q(\lambda_1)P_1 + Q(\lambda_2)P_2 + \dots + Q(\lambda_p)P_p.$$

En particulier

$$L_i(S) = \sum_{j=1}^p L_i(\lambda_j) P_j.$$

Or, par construction, on a

$$L_i(\lambda_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a la simplification :

$$L_i(S) = P_i.$$

**9.b)**

```
def Poly1(S):
    [n,m]=np.size(S)
    L=SpectreDS(S)
    p=len(L)
    P=np.zeros([n,n])
    r=1
    for i in range(1,p):
        P=np.dot(P,S-L[i])
        r=r*(L[0]-L[i])
    return (1/r)*P
```

**10.a)** Comme les matrices  $P_i$  sont symétriques, par combinaison linéaire, la matrice  $\tilde{f}(S)$  reste symétrique.

On suppose maintenant  $f$  strictement croissante (le cas strictement décroissant est similaire). Comme

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$$

on a aussi

$$f(\lambda_1) < f(\lambda_2) < \dots < f(\lambda_p).$$

Notons que  $S$  et  $\tilde{f}(S)$  ont les mêmes espaces propres :

$$E_{\lambda_i}(S) = \text{Im } P_i = E_{f(\lambda_i)}(\tilde{f}(S)).$$

Et par conséquent les mêmes matrices de projections orthogonales. La décomposition est alors donnée par la définition directement :

$$\tilde{f}(S) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) P_i.$$

👁 Pour comprendre la nuance, on peut prendre le cas extrême où  $f$  est constante égale à 1. Dans ce cas, il n'y a qu'une valeur propre 1 et la décomposition est  $\tilde{f}(S) = I_n$ .

**10.b)** D'après ce qui précède, la stricte monotonie de  $g$  indique que la décomposition spectrale de  $\tilde{g}(S)$  est

$$\tilde{g}(S) = \sum_{i=1}^n g(\lambda_i) P_i.$$

On définit alors  $\tilde{f}(\tilde{g}(S))$  par

$$\tilde{f}(\tilde{g}(S)) = \sum_{i=1}^n f(g(\lambda_i)) P_i = \sum_{i=1}^n f \circ g(\lambda_i) P_i.$$

On retrouve bien la définition de  $\widetilde{f \circ g}(S)$

$$\widetilde{f \circ g}(S) = \sum_{i=1}^n f \circ g(\lambda_i) P_i = \tilde{f}(\tilde{g}(S)) = \tilde{f} \circ \tilde{g}(S).$$



D'où le résultat.

**11.a)** Justifions que  $\tilde{g}$  est croissante : Soient  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(S_1) &= \sum_{i=1}^n g(\lambda_i^1) P_i^1 \\ &= \sum_{i=1}^n (c\lambda_i^1 + d) P_i^1 \\ &= c \sum_{i=1}^n \lambda_i^1 P_i^1 + d \sum_{i=1}^n P_i^1 \\ \tilde{g}(S_1) &= cS_1 + dI_n.\end{aligned}$$

De même  $\tilde{g}(S_2) = cS_2 + dI_n$ .

D'où pour  $S_1 \leq S_2$ , on a

$$\tilde{g}(S_2) - \tilde{g}(S_1) = c(S_2 - S_1) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

On a bien  $\tilde{g}$  croissante.

**11.b)** Soit  $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\frac{bc-ad}{c(cx+d)} + \frac{a}{c} &= \frac{bc-ad+a(cx+d)}{c(cx+d)} \\ &= \frac{acx+bc}{c(cx+d)} = \frac{ax+b}{cx+d} \\ \frac{b-ad}{c(cx+d)} + \frac{a}{c} &= h(x)\end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}f: t \in \mathbb{R}_*^+ &\mapsto \frac{bc-ad}{c} \cdot t + \frac{a}{c} \in \mathbb{R} \\ i: t \in \mathbb{R}_*^+ &\mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}_*^+ \\ g: t \in \mathbb{R}_*^+ &\mapsto cx+d \in \mathbb{R}_*^+ \quad (c, d > 0).\end{aligned}$$

Alors on a

$$h = f \circ i \circ g$$

et  $f, i, g$  sont strictement monotones. Plus précisément,  $f$  est strictement croissante si  $bc - ad > 0$  et strictement décroissante pour  $bc - ad < 0$  (le cas  $bc - ad = 0$  est exclu).

On a vu que  $\tilde{g}$  est croissante. De même  $\tilde{f}$  est monotone (en distinguant suivant le signe de  $ad - bc$ ).

Enfin on a montré que  $\tilde{i}$  est décroissante.

Supposons  $ad - bc < 0$ , le cas positif est similaire. Soient  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}S_1 \leq S_2 &\Rightarrow \tilde{g}(S_1) \leq \tilde{g}(S_2) && \tilde{g} \text{ croissante} \\ &\Rightarrow \tilde{i} \circ \tilde{g}(S_1) \geq \tilde{i} \circ \tilde{g}(S_2) && \tilde{i} \text{ décroissante} \\ &\Rightarrow \tilde{f} \circ \tilde{i} \circ \tilde{g}(S_1) \leq \tilde{f} \circ \tilde{i} \circ \tilde{g}(S_2) && \tilde{f} \text{ décroissante.}\end{aligned}$$

Or avec la question précédente :

$$\tilde{f} \circ \tilde{i} \circ \tilde{g} = \widetilde{f \circ i \circ g}$$

L'application  $\widetilde{f \circ i \circ g}$  est croissante matriciellement

$$S_1 \leq S_2 \Rightarrow \widetilde{f \circ i \circ g}(S_1) \leq \widetilde{f \circ i \circ g}(S_2).$$

L'application est décroissante pour  $ad - bc > 0$ .

Dans tous les cas l'application est monotone.

**12.a)** Posons pour  $x$  fixé,  $C = A(x) - B(x)$ . On a :

$$\begin{aligned}\det C &= \left( \operatorname{ch}(x) - \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \right) \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)^2 \\ &= \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 - 1 \\ &= (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)) - 1 \\ \det C &= e^{-x}e^x - 1 = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que 0 est valeur propre de C.

De plus C est diagonalisable. Si  $\lambda$  est l'autre valeur propre de C, l'invariance par similitude de la trace donne :

$$\lambda + 0 = \operatorname{Tr}(C) = 2 \operatorname{ch}(x) + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \geq 0.$$

Ainsi C a deux valeurs propres positives et

$$C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \text{puis} \quad A(x) \geq B(x).$$

**13.b)**

On peut aussi calculer

$$\det(A(x) - \lambda I_2)$$



pour trouver le spectre de  $A(x)$  puis les espaces propres. Ici, on peut noter que la somme est constante sur les lignes, dès lors  ${}^t[1, 1]$  est vecteur propre. Comme les espaces propres sont orthogonaux dans le cas symétrique, il est pertinent de tester avec  ${}^t[1, -1]$ .

$$\begin{aligned}A(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^x \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\neq 0} \\ A(x) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-x} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\neq 0}\end{aligned}$$

Ainsi  $\{e^{-x}; e^x\} \subset \operatorname{Sp}(A(x))$ .

puis égalité puisque  $A(x)$  ne peut avoir plus de deux valeurs propres ( $x \neq 0, e^{-x} \neq e^x$ ).

On en déduit une base orthonormée des sous-espaces propres en posant

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

puis une b.o.n de  $E_{e^x}(A(x))$  est constituée par l'unique vecteur  $X_1$  et celle de  $E_{e^{-x}}(A(x))$  est  $(X_2)$ . On a alors

$$P_1 = {}^tX_1X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad P_2 = {}^tX_2X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Petit résultat ici : si X est un vecteur normé, la matrice de la projection orthogonale sur  $\operatorname{Vect}(X)$  est donnée par  ${}^tXX$ .

**12.c)** On a directement

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_\alpha(A(x)) &= p_\alpha(e^x)P_1 + p_\alpha(e^{-x})P_2 \\ &= (e^x)^\alpha P_1 + (e^{-x})^\alpha P_2 \\ \widetilde{p}_\alpha(A(x)) &= e^{\alpha x}P_1 + e^{-\alpha x}P_2.\end{aligned}$$

Or toutes les matrices  $A(x)$  (pour  $x \neq 0$ ) ont les mêmes matrices de projections dans leur décomposition spectrale. Ainsi

$$A(\alpha x) = e^{\alpha x}P_1 + e^{-\alpha x}P_2.$$

D'où  $\widetilde{p}_\alpha(A(x)) = A(\alpha x)$ .

**12.d)** Le réel 0 est valeur propre de  $B(x)$  associé au vecteur propre normée

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La seconde valeur propre est  $1/\text{ch } x$  associée à

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On calcule ensuite  ${}^tY_1Y_1$ ,  ${}^tY_2Y_2$ . On en déduit que la décomposition spectrale de  $B(x)$  est donnée par

$$B(x) = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (1/\text{ch } x) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Par définition de la fonction matricielle

$$p_\alpha(B(x)) = p_\alpha(0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + p_\alpha(1/\text{ch } x) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On retrouve bien le résultat attendu dès le début

$$p_\alpha(B(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (1/\text{ch } x)^\alpha \end{bmatrix}.$$

**12.e)** On a en reprenant le calcul de la question 12.d)

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \text{ch}(\alpha x) \left( \text{ch}(\alpha x) - \frac{1}{\text{ch}(x)^\alpha} \right) - \text{sh}(\alpha x)^2 \\ &= 1 - \frac{\text{ch}(\alpha x)}{\text{ch}(x)^\alpha} = 1 - \text{ch}(\alpha x) \text{ch}(x)^{-\alpha}/\end{aligned}$$

Posons  $u(x) = \text{ch}(x) - 1$  de sorte qu'au voisinage de 0

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{2}(e^x - 1 + e^{-x} - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \right) \\ u(x) &= \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

D'où  $\text{ch}(\alpha x) = 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)$

et

$$\begin{aligned}\text{ch}(x)^{-\alpha} &= (1 + u(x))^{-\alpha} \\ &= 1 - \alpha u(x) + o(u(x)) \quad \text{car } u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= 1 - \alpha u(x) + o(x^2) \quad \text{car } u(x) \sim x^2/2 \\ &= 1 - \alpha \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= 1 - \left( 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) \right) \left( 1 - \frac{\alpha x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &= 1 - \left( 1 - \alpha \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\ \zeta(x) &= \alpha \cdot \frac{\alpha - 1}{2} \cdot x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Qu'on peut réécrire :

$$\zeta(x) \sim \frac{(\alpha - 1)\alpha}{2} x^2.$$

**12.f)** Or  $\frac{\alpha-1}{2}\alpha x^2 < 0$ . Donc dans un voisinage de 0

$$\zeta(x) < 0.$$

Or on montre que

$$\zeta(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$$

où  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$  désignent les deux valeurs propres de  $\widetilde{p}_\alpha(A(x)) - \widetilde{p}_\alpha(B(x))$ . Dès lors, le spectre n'est pas inclus dans  $\mathbb{R}^+$ , la matrice  $\widetilde{p}_\alpha(A(x)) - \widetilde{p}_\alpha(B(x))$  n'appartient pas à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . En résumé, l'implication

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \quad A \leq B \Rightarrow \widetilde{p}_\alpha(A) \leq \widetilde{p}_\alpha(B)$$

est fautive. L'application  $\widetilde{p}_\alpha$  n'est pas croissante.

**13.a)** On note  ${}^tX = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Ainsi pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,

$${}^tXA(t)X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{ij}(t).$$

Par combinaison linéaire de fonctions intégrables sur  $I$ ,  $t \mapsto {}^tXA(t)X$  est intégrable sur  $I$  avec

$$\begin{aligned}\int_I {}^tXA(t)X dt &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_I a_{ij}(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \underbrace{\left[ \int_I A(t) \cdot dt \right]_{i,j}}_{\text{coeff de } \int_I A \text{ en } (i,j)} \\ \int_I {}^tXA(t)X dt &= {}^tX \left( \int_I A(t) dt \right) X.\end{aligned}$$

**13.b)** Le coefficient en position  $(i, j)$  de  $f(t)M$  est

$$f(t)[M]_{ij}$$

$t \mapsto f(t)[M]_{ij}$  est intégrable car  $f$  l'est et  $[M]_{ij}$  est une constante et

$$\int_I [f(t)M]_{ij} dt = \int_I f(t)[M]_{ij} dt = \left( \int_I f(t) dt \right) [M]_{ij}.$$

Les matrices  $\int_I f(t)M dt$  et  $\left( \int_I f(t) dt \right) M$  ont donc même taille et mêmes coefficients, elles sont égales.

**14.a)** L'intégrande est continue sur  $]0; +\infty[$ . On a donc une intégrale généralisée en 0 et  $+\infty$ .

→ Étude en 0.

$$\frac{x}{(1+x)t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{t^\alpha}.$$

Comme l'intégrale de Riemann  $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$  est convergente pour  $\alpha \in ]0; 1[$ , on prouve la convergence de  $F(x)$  en 0 par le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives.

→ Étude en  $+\infty$ .

$$\frac{x}{(1+xt)t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

De nouveau, une comparaison avec une intégrale de Riemann (avec  $\alpha + 1 > 1$ ) permet de justifier la convergence en  $+\infty$ .

**14.b)** Soit  $x \neq 0$ . On effectue de changement de variable affine  $u = xt$  (donc  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotone) pour avoir

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+xt)t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)\left(\frac{u}{x}\right)^\alpha} = x^\alpha C$$

où on a posé  $C = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)u^\alpha} = F(1).$

**14.c)** On a  $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

$$\text{Sp}(S^{-1}) \subset \mathbb{R}_*^+.$$

Ainsi  $S^{-1} + tI_n$  est inversible car  $-t \in \mathbb{R}^-$  et  $-t$  ne peut être dans le spectre de  $S^{-1}$ .

Soit  $X$  un vecteur propre de  $S$  et  $\lambda$  la valeur propre associée

$$SX = \lambda X \quad \text{puis} \quad S^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$$

et  $(S^{-1} + tI_n)X = SX^{-1} + tX = \left(\frac{1}{\lambda} + t\right)X.$

Enfin  $(S^{-1} + tI_n)^{-1}X = \left(\frac{1}{\lambda} + t\right)^{-1}X.$

On en déduit que  $S$  et  $(S^{-1} + I_n)^{-1}$  ont les mêmes espaces propres et donc les mêmes matrices  $P_i$  de projections orthogonales sur les espaces propres. La valeur propre de  $(S^{-1} + I_n)^{-1}$  sur  $E_i$  étant

$$\left(\frac{1}{\lambda_i} + t\right)^{-1} = \left(\frac{t + \lambda_i}{\lambda_i}\right)^{-1} = \frac{\lambda_i}{t + \lambda_i}.$$

D'où le résultat.

**14.d)** On a par définition

$$\begin{aligned} \tilde{F}(S) &= \sum_{i=1}^p F(\lambda_i) P_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left( \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i t) t^\alpha} dt \right) P_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left( \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i t) t^\alpha} P_i dt \right) \\ &= \int_0^p \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i t) t^\alpha} P_i dt \\ \tilde{F}(S) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} (S^{-1} + \alpha I_n)^{-1} dt. \end{aligned}$$

**14.e)** On a  $A \leq B$  puis d'après la proposition  $\mathcal{P}$

$$A^{-1} \geq B^{-1}$$

d'où (question 5 avec  $S = tI_n$ )

$$A^{-1} + tI_n \geq B^{-1} + tI_n$$

et de nouveau la proposition  $\mathcal{P}$  (les matrices sont définies positives)

$$(A^{-1} + tI_n)^{-1} \leq (B^{-1} + tI_n)^{-1}$$

La différence de ces deux matrices est définie positive, on peut l'écrire sous la forme  ${}^tMM$  d'après 1.a) ii). Il vient

$$\begin{aligned} &{}^tX(B^{-1} + tI_n)^{-1}X - {}^tX(A^{-1} + tI_n)^{-1}X \\ &= {}^tX\left((B^{-1} + tI_n) - (A^{-1} + tI_n)^{-1}\right)X \\ &= {}^tX{}^tMMX \\ &= {}^t(MX)MX \\ &= \|MX\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

**14.f)** On peut intégrer la relation précédente pour avoir

$$\int_0^{+\infty} {}^tX(A^{-1} + tI_n)^{-1}X dt \leq \int_0^{+\infty} {}^tX(B^{-1} + tI_n)^{-1}X dt.$$

Soit avec la question 13.a)

$${}^tX\left(\int_0^{+\infty} (A^{-1} + tI_n)^{-1} dt\right)X \leq {}^tX\left(\int_0^{+\infty} (B^{-1} + tI_n)^{-1} dt\right)X$$

et la 14.d) donne

$${}^tX\tilde{F}(A)X \leq {}^tX\tilde{F}(B)X$$

d'où  ${}^tX(\tilde{F}(B) - \tilde{F}(A))X \geq 0.$

Si  $X$  est un vecteur propre de  $\tilde{F}(B) - \tilde{F}(A)$  pour la valeur propre  $\lambda$ , on obtient

$$\underbrace{\lambda \|X\|^2}_{>0} = {}^tX(\lambda X) = {}^tX(\tilde{F}(B) - \tilde{F}(A))X \geq 0.$$

Ainsi  $\text{Sp}(\tilde{F}(B) - \tilde{F}(A)) \subset \mathbb{R}^+$

et  $\tilde{F}(B) - \tilde{F}(A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  On conclut :

$$A \leq B \Rightarrow \tilde{F}(A) \leq \tilde{F}(B)$$

L'application  $\tilde{F}$  est croissante.

$$\text{Comme } \tilde{F}(A) = \sum_{i=1}^n F(\lambda_i) P_i$$

$$= \sum_{i=1}^n C \lambda_i^\alpha P_i$$

$$= C \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha P_i$$

$$\tilde{F}(A) = C \tilde{p}_\alpha(A)$$

Comme  $C > 0$ , on a la même monotonie pour  $\tilde{F}$  et  $\tilde{p}_\alpha$ , soit croissante.

**15.a)** Soit  $A \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t} dt &= \left[ \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \ln(x+t) \right]_0^A \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+A^2) - \ln(x+A) + \ln(x) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+A^2}{(x+A)^2}\right) + \ln(x) \end{aligned}$$

Or 
$$\frac{1+A^2}{(x+A)^2} \sim \frac{A^2}{A^2} = 1.$$

Par continuité du logarithme

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+A^2}{(x+A)^2} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1) = 0.$$

D'où le résultat.

**15.b)** On a

$$\begin{aligned} \ln S &= \sum_{i=1}^p \ln(\lambda_i) P_i \\ &= \sum_{i=1}^p \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{\lambda_i+t} \right) dt \cdot P_i \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \sum_{i=1}^p P_i - \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i+t} P_i dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} I_n - (s+tI_n)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Car en reprenant la démarche de la question 14.c)

$$(S+tI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i+t)^{-1} P_i.$$

**Bonus.** La preuve de  $1+1=2$  (au cas où vous avez un doute) :

$$\text{*54.43. } \vdash :. \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$$

*Dem.*

$$\begin{aligned} \vdash . \text{*54.26. } \supset \vdash :. \alpha = \iota'x. \beta = \iota'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. &\equiv . x \neq y. \\ [\text{*51.231}] &\equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda. \\ [\text{*13.12}] &\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdash . (1). \text{*11.11.35. } \supset \\ \vdash :. (\exists x, y). \alpha = \iota'x. \beta = \iota'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. &\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2) \end{aligned}$$

$$\vdash . (2). \text{*11.54. *52.1. } \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that  $1+1=2$ .

**15.c)** Soient  $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n$  telles que  $S_1 \leq S_2$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}_*^+$

$$S_1 + tI_n \leq S_2 + tI_n.$$

Par la propriété  $\mathcal{P}$

$$(S_1 + tI_n)^{-1} \geq (S_2 + tI_n)^{-1}.$$

Ce qui donne pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX(S_1 + tI_n)^{-1}X \geq {}^tX(S_2 + tI_n)^{-1}X.$$

On a une inégalité entre réels que l'on intègre et avec la question 13.a)

$${}^tX \int_0^{+\infty} (S_1 + tI_n)^{-1} dt X \geq {}^tX \int_0^{+\infty} (S_2 + tI_n)^{-1} dt X.$$

Ce qui se traduit de nouveau par l'inégalité sur les matrices

$$\int_0^{+\infty} (S_1 + tI_n)^{-1} dt \geq \int_0^{+\infty} (S_2 + tI_n)^{-1} dt.$$

On peut maintenant multiplier par  $-1$  et utiliser la question 5 pour obtenir

Finalement

$$\ln(S_1) \leq \ln(S_2).$$

Ce qui conclut!