
Devoir maison 0 : Cahier de vacances

1 Analyse

1.1 Etude de suites usuelles

Exercice 1.

Pour les suites (u_n) suivantes déterminer le terme général u_n et $\sum_{k=0}^n u_k$

1. $u_0 = 3, u_{n+1} = u_n + 2$
2. $u_4 = -1, u_{n+1} = 2u_n$
3. $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n + 1$
4. $u_0 = 1, u_1 = -2, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

Exercice 2.

Donner les expressions en fonction de n des sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n 3^k$
2. $\sum_{k=0}^n (k^2 - 2k + 1)$
3. $\sum_{k=5}^{n+2} \frac{5}{2^k}$
4. $\sum_{k=3}^n \frac{2}{k(k+1)}$ *Indication : Penser à faire une décomposition en éléments simples.*
5. $\sum_{k=n}^{3n} 7^k$

1.2 Etude de suites récurrentes

Exercice 3. *

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et par la relation de récurrence ;

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 1$.
2. Démontrer que la suite est monotone.
3. En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4. *

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 2)/3$.

1. Démontrer que $u_n \geq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 5. **

Le but de l'exercice est d'étudier, pour certaines valeurs de u_0 , le comportement de la suite récurrente (u_n) vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x^2 - 1$.

1. Quelles sont les limites possibles de la suite (u_n) ?
2. On suppose pour commencer que $u_0 > (1 + \sqrt{5})/2$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > (1 + \sqrt{5})/2$.
 - (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - (c) La suite (u_n) converge-t-elle ?
 - (d) Ecrire une fonction Python `depasse(M,u0)` qui donne le premier entier n tel que $u_n \geq M$ pour une valeur de u_0 donnée.
3. On suppose désormais que $u_0 \in [-1, 0]$.
 - (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 0]$
 - (b) On suppose plus particulièrement que $u_0 \in \left[-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right]$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. On définit aussi la fonction $g(x) = f \circ f(x)$.
 - i. Démontrer que g est croissante sur $[-1, 0]$.
 - ii. Etudier le signe de $g(x) - x$.
 - iii. En déduire que la suite (v_n) est décroissante. En déduire que (v_n) est convergente, et déterminer sa limite.
 - iv. Démontrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite.
 - v. Que dire de la suite (u_n) ?
 - (c) On suppose que $u_0 \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right]$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? (on pourra déterminer un intervalle contenant u_1).
4. On suppose que $u_0 \in]0, 1[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 6. *

1. Etablir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, admet une unique solution que l'on notera x_0 .
2. Soit la fonction g définie par :

$$g : \begin{cases} [0, +\infty & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1+x}{1+e^x} \end{cases}$$
 - (a) Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$, admet pour seule solution x_0 et que $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.
 - (b) Dresser le tableau de variations de g .
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq x_0$.
 - (b) Etudier la convergence de la suite (u_n) .
 - (c) Montrer : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{8}$.
 - (d) Etablir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$. Retrouver le résultat de la question (b)
 - (e) Ecrire un programme Python permettant de déterminer une approximation de x_0 à 10^{-5} près.

1.3 Intégrales sur un segment

Exercice 7.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^{-3} \frac{1}{2u+1} du$
2. $\int_2^3 \frac{1}{(1-t)^3} dt$
3. $\int_0^1 \frac{z+1}{z^2+1} dz$
4. $\int_0^{\pi/2} (t^2+1) \cos(2t) dt$
5. $\int_0^1 x e^{-x} dx$
6. $\int_0^\pi \sin(t) t dt$
7. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ en posant $x = \tan(t)$.
8. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx$ en posant $x = \sin(t)$.

Exercice 8.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx$.

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. Démontrer que la suite (I_n) est bornée.
3. Etudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle est convergente.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x dx$. Donner alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

1.4 Intégrales généralisées

Exercice 9.

Déterminer si les intégrales suivantes convergent et les calculer (si existence) :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ (juste la convergence)
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$ en posant $u = e^x$.
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt$
4. $\int_0^1 \ln(x) dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) \ln(\sin(\theta)) d\theta$ en posant $t = \cos(\theta)$ et en admettant qu'une primitive de $\ln(1-t^2)$ sur $] -1, 1[$ est $\varphi : t \mapsto t \ln(1-t^2) - 2t + \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

Exercice 10.

Pour tout entier naturel n , on note I_n l'intégrale suivante

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n e^{-x} dx$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Montrer que I_n converge.
3. Déterminer un lien entre I_n et I_{n+1}
4. Calculer I_n .

1.5 Séries

Exercice 11.

Pour les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ suivantes, déterminer si la série de terme général u_n converge.

1. $u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$
2. $u_n = \sin \left(e^{-n+2} + \frac{2}{n} \right)$
3. $u_n = \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$
4. $u_n = \exp(\sin(2^{-n})) - 1$
5. $u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{3n + 4n^2 - 1}} - 1$

Exercice 12.

On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$, par $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n .
(b) En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. (a) Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.
(b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

- (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

2 Algèbre

2.1 Calcul matriciel

Exercice 13.

A l'aide du binôme de Newton déterminer l'expression de A^n où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.

Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide du pivot de Gauss

Exercice 15.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 + A - 2I_3 = 0$.
2. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de n .
5. ** Retrouver ce résultat à l'aide du binôme de Newton.

2.2 Applications linéaires**Exercice 16.**

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur noyau, leur image et leur matrice dans les bases canoniques. Préciser si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2y - 3z, x + z)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X], P \mapsto P - P'$
4. $f_4 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3, P \mapsto (P(0), P'(0), P(2))$

Exercice 17.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur.
2. Montrer que $\ker f$ et $\text{Im } g$ sont supplémentaires.

3 Proba**3.1 Probabilités générales****Exercice 18.**

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1 .
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
3. En déduire p_n .

Exercice 19.

Dans un laboratoire on fait les constats suivants :

- si une souris porte l'anticorps A , alors 2 fois sur 5 elle porte aussi l'anticorps B ,
- si une souris ne porte pas l'anticorps A , alors 4 fois sur 5 elle ne porte pas non plus l'anticorps B .

La moitié de la population porte l'anticorps A .

1. Calculer la probabilité que si une souris possède l'anticorps B , elle possède l'anticorps A .
2. Calculer la probabilité que si une souris ne possède pas l'anticorps B , elle ne possède pas l'anticorps A .

3.2 Variables aléatoires finies

Exercice 20.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer $E[X]$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[X]$.

3.3 Variables aléatoires discrètes infinies

Exercice 21.

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi tous les sauts précédents, de hauteurs $1, 2, \dots, n$. La probabilité de succès au $n^{\text{ième}}$ saut vaut $p_n = \frac{1}{n}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement "le sauteur réussit le $k^{\text{ième}}$ saut" et on note X la variable égale au numéro du dernier saut réussi.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(X = n)$ en fonction des S_k .
(b) Déterminer la loi de X et vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

3.4 Couples de variables

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n , contenant chacune n boules, et d'une pièce dont la probabilité d'apparition de "Pile" est $p \in]0, 1[$. L'urne k contient k boules portant le numéro 1 et $n - k$ boules portant le numéro 0.

On lance n fois la pièce et on tire une boule au dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de "Piles" obtenus.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée et Y la variable aléatoire égale au nombre de "Piles" obtenus.

1. Déterminer la loi de Y
2. Déterminer la loi de X
3. On a tiré une boule numéro 1. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne n ?