

Chapitre 5

Matrices et systèmes linéaires

1 Définition d'une matrice

Définition 1.0.1. Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & (a_{i,j}) & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

où $a_{i,j}$ est le **coefficient** de la i -ème ligne et j -ème colonne.

On dit que la matrice A est de **taille** (n, p) .

Exemple 1.0.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -1 \\ \frac{1}{6} & 3 & 2 \\ -2.1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Donner la valeur des coefficients

suivants :

$$\begin{array}{l} a_{1,2} = \\ a_{2,3} = \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a_{3,2} = \\ a_{1,3} = \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} a_{2,1} = \\ a_{2,2} = \end{array} \right|$$

Notation 1.0.2. L_i désigne la i -ème ligne et C_j la j -ème colonne.

Notation 1.0.3. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.0.4.

- Une matrice qui a autant de lignes que de colonnes, c'est-à-dire telle que $n = p$, est appelée **matrice carrée d'ordre n** . Elle forme en effet un tableau carré de nombres de dimension n .
- Une matrice qui n'a qu'une ligne, c'est-à-dire $n = 1$, est appelée **vecteur ligne de longueur p** .
- Une matrice qui n'a qu'une colonne, c'est-à-dire $p = 1$, est appelée **vecteur colonne de longueur n** .

Notation 1.0.5. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.0.2. 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & e \end{pmatrix}$ est

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & -2 \end{pmatrix}$ est

Définition 1.0.6.

- Les éléments diagonaux d'une matrice carrée sont les termes $a_{i,i}$.
 - Une **matrice** est **diagonale** si $n = p$ et si $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$.
 - Une matrice est **triangulaire**
 - **supérieure** si $\forall i > j, a_{i,j} = 0$
 - **inférieure** si $\forall i < j, a_{i,j} = 0$.
- On appelle **pivots** ses coefficients diagonaux.

Exemple 1.0.3. 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est

3. La matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0.3 & -2 \end{pmatrix}$ est

Définition 1.0.7. La **matrice identité** est la matrice diagonale telle que $a_{i,i} = 1$ pour tout $i \leq n$. On la note I_n .

Définition 1.0.8. On dit que deux matrices A et B sont **égales** si elles sont de même dimension et que pour toutes les lignes i et toutes les colonnes j

$$a_{i,j} = b_{i,j}.$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition

Proposition 2.1.1. Soient A et B deux matrices de même taille.

La matrice $A + B$ est la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut

$$a_{i,j} + b_{i,j}$$

pour toute ligne i et toute colonne j .

Exemple 2.1.1. Calculer les somme suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} =$

Remarque 2.1.1. La somme de matrices est commutative, c'est-à-dire que $A + B = B + A$.

2.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Proposition 2.2.1. Soit A une matrice et k un nombre réel.

La matrice kA est la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut

$$k a_{i,j}$$

pour toute ligne i et toute colonne j .

Exemple 2.2.1. Calculer les produits suivants :

1. $2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

2. $-3 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} =$

2.3 Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne

Proposition 2.3.1. Soit A un vecteur ligne de longueur n et B un vecteur colonne de longueur n .

La produit $\mathbf{AB}$ est le nombre réel obtenu en ajoutant les produits du premier coefficient de A par le premier coefficient de B , du second coefficient de A par le second coefficient de B , etc :

$$a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1} + a_{1,3} b_{3,1} + \dots + a_{1,n} b_{n,1}.$$

Exemple 2.3.1. Calculer les produits suivants :

1. $(1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

2. $(1 \ -1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} =$

2.4 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Proposition 2.4.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un vecteur colonne de longueur p .

La matrice $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ est la matrice colonne de longueur p dont le coefficient en ligne i est le produit de la ligne i de la matrice A et de la matrice colonne B :

$$c_i = a_{i,1} b_{1,1} + a_{i,2} b_{2,1} + a_{i,3} b_{3,1} + \dots + a_{i,p} b_{p,1}$$

pour toute ligne $i \in [1; n]$.

Exemple 2.4.1. Calculer les produits suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

2.5 Produit de deux matrices

Proposition 2.5.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{R})$.

La matrice $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ est la matrice de taille (n, p) dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut

$$c_{i,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + a_{i,3} b_{3,j} + \dots + a_{i,n} b_{n,j}$$

pour toute ligne i et toute colonne j . C'est-à-dire que le coefficient $c_{i,j}$ est le produit de la i^{eme} ligne de A par la j^{eme} colonne de B .

Exemple 2.5.1. Calculer les produits suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$

Remarque 2.5.1. En général, le produit de matrices est non commutatif : $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (voir les exemples 1 et 2 ci-dessus).

Définition 2.5.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit m un entier naturel.

La matrice $\mathbf{A}^m$ est la matrice carrée d'ordre n définie par

$$A^m = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{m \text{ termes}}.$$

Exemple 2.5.2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 =$

2.6 Transposition d'une matrice

Définition 2.6.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On définit la **matrice transposée de A** par ${}^tA = C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec :

$$\forall i \in [1, p], \forall j \in [1, n], c_{i,j} = a_{j,i}$$

Exemple 2.6.1. Donner les transposées des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 2.6.1.

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
2. ${}^t(aA) = a {}^tA$.
3. ${}^t({}^tA) = A$.
4. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Définition 2.6.2.

- Une matrice est **symétrique** si et seulement si ${}^tA = A$.
- Une matrice est **antisymétrique** si et seulement si ${}^tA = -A$.

Exemple 2.6.2. Déterminer si les matrices suivantes sont symétriques ou antisymétriques.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Notation 2.6.3.

- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques.
- On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n antisymétriques.

3 Matrices carrées

3.1 Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée

Méthode 3.1. Pour calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée A , il y a deux méthodes :

1. On calcule à la main les premières puissances de A , on en déduit la forme générale des coefficients et on prouve cette formule par récurrence.
2. On décompose la matrice A sous la forme $A = a I_n + N$, avec N une matrice nilpotente, c'est-à-dire telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$ ou bien telle que N^k s'écrit facilement à partir de N , puis on utilise la formule du binôme de Newton.

Exemple 3.1.1. On note $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3 .

2. Calculer B^n pour tout entier naturel n .

Théorème 3.1.1 (Formule du binôme de Newton).

Si A et B sont deux matrices carrées qui commutent, on a la formule :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Exemple 3.1.2. Calculer A^n où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Matrice inversible

3.2.1 Le cas général

Définition 3.2.1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** si et seulement si il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

Notation 3.2.2. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ (on dit que A admet un inverse à droite) alors A est inversible d'inverse $A^{-1} = B$.

Remarque 3.2.1. De même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $BA = I_n$ (on dit que A a un inverse à gauche) alors A est inversible d'inverse $A^{-1} = B$.

Exemple 3.2.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 , $A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_3$.

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Proposition 3.2.2.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Proposition 3.2.3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 3.2.2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. En utilisant la proposition, donner B l'inverse de A .
3. Vérifier qu'il s'agit bien de l'inverse de A .

3.2.2 Matrices diagonales

Théorème 3.2.4. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonales d'ordre n est stable par addition et par multiplication et commutatif.

Exemple 3.2.3. Multiplier les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 3.2.5. $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses pivots sont tous différents de 0 et

$$(D(a_1, \dots, a_n))^{-1} = D\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

Exemple 3.2.4. Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et, si oui, donner son inverse.

3.2.3 Matrices triangulaires

Théorème 3.2.6. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (de même pour inférieures) d'ordre n est stable par addition et par multiplication.

Théorème 3.2.7. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses pivots sont tous différents de 0.

Exemple 3.2.5. Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Remarque 3.2.2. Dans le cas des matrices triangulaires, il n'existe pas de formule simple pour la matrice inverse.

4 Systèmes linéaires

4.1 Lien entre système linéaire et matrice

On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

qui comporte n équations et p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Il peut s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

- A est la matrice de dimension (n, p) de coefficients $a_{i,j}$
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de longueur p
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de longueur n .

Proposition 4.1.1. On considère un système linéaire qui s'écrit $AX = B$ avec A une matrice carrée d'ordre n et B une matrice colonne de longueur n .

Le système linéaire admet une unique solution si et seulement si A est inversible.

La solution vaut alors

$$X = A^{-1}B.$$

Définition 4.1.1. Un **système de Cramer** est un système d'équations de la forme $AX = B$ avec A une matrice inversible.

Exemple 4.1.1. Écrire le système linéaire $\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 8 \end{cases}$ sous forme matricielle et le résoudre.

Proposition 4.1.2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = Y$ possède une unique solution Cette solution donne A^{-1} par $X = A^{-1}Y$.

Exemple 4.1.2. Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.2 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 4.2.1. Les **opérations élémentaires** sont les opérations que l'on peut effectuer sur un système sans changer les solutions du système :

- Échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplier une ligne par un scalaire $a \neq 0$: $L_i \leftarrow aL_i$
- Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$

Théorème 4.2.1. Soit A une matrice. Il existe une suite d'opérations élémentaires telle que la matrice obtenue soit triangulaire supérieure.
La matrice obtenue est une **réduite de Gauss** de A .

Remarque 4.2.1. Il n'y a pas unicité de cette réduite.

Exemple 4.2.1. Donner deux exemples de réduite de Gauss de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ en précisant la suite des opérations élémentaires effectuées.

Théorème 4.2.2. Soit A une matrice carrée. A est **inversible** si et seulement si une de ses réduites de Gauss est inversible, c'est à dire si tous ses pivots sont non nuls.

4.3 Algorithme du pivot de Gauss

4.3.1 Résoudre un système linéaire

Proposition 4.3.1. On veut résoudre un système linéaire du type

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

Où les coefficients $a_{i,j}$ les b_j sont connus.

Pour cela, on applique l'**algorithme du pivot de Gauss**.

Étape 1	Déterminer la première ligne dont le coefficient devant x_1 est non nul (de préférence 1 ou -1)
Étape 2	Si ce n'est pas la première ligne échanger la première ligne et cette ligne afin d'avoir un coefficient $a \neq 0$ devant x_1
Étape 3	Diviser la ligne par a
Étape 4	Ajouter des multiples adéquats de cette ligne aux lignes en-dessous pour faire disparaître les x_1 dans les lignes en dessous
Étape 5	On recommence avec les lignes restantes et x_2 puis avec $x_3, \dots$, jusqu'à avoir un système de la forme $\begin{cases} x_1 + a'_{1,2} x_2 + \dots + a'_{1,p} x_p = b'_1 \\ \quad \quad \quad x_2 + \dots + a'_{2,p} x_p = b'_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_p = b'_n \end{cases}$
Dernière étape	En travaillant de droite à gauche, pour chaque colonne qui contient un pivot, on ajoute des multiples adéquats de la ligne du pivot aux lignes au-dessus pour faire apparaître des 0 au-dessus du pivot

Il ne reste plus qu'à en déduire x_p puis $x_{p-1}, \dots$, puis x_1 .

Exemple 4.3.1. Résoudre le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$$

4.3.2 Inverser une matrice

Proposition 4.3.2. On souhaite inverser, si possible, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On commence par écrire notre problème sous forme de système : $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ Ensuite, on applique à ce système l'algorithme du pivot de Gauss.

Si A est inversible, on aboutit à un système de la forme $X = BY$ où on aura alors $B = A^{-1}$

Exemple 4.3.2. Inverser, si possible, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.