

Devoir maison 14 pour le 26/05/2026

Exercice 1.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{n \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} = \frac{1}{e^{-x} + 1}.$$

- (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$.

3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation : $f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions usuelles qui le sont avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\text{Pour tout réel } x, f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x(1 + e^x - e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

- (b) Déterminer le sens de variation de f . Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.

Une exponentielle et un carré sont toujours positifs, donc f' est toujours positive. Par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Voici son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow \frac{1}{2}$	1

$$f(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{e^0}{(1 + e^0)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ donc la tangente a pour équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

4. Montrer que pour tout réel x on a : $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions usuelles qui le sont avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{e^x(1+2e^x+e^{2x}) - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{e^x + 2e^{2x} + e^{3x} - 2e^{2x} - 2e^{3x}}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{e^x(1-e^x)(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \\
 &= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}
 \end{aligned}$$

5. Étudier la convexité de f .

Pour tout nombre réel x , e^x est strictement positif et donc $(1+e^x)^3$ est strictement positif également. Par conséquent, le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $(1-e^x)$.

Réolvons $1-e^x=0$:

$$1-e^x=0 \iff e^x=1 \iff x=\ln(1) \iff x=0.$$

Voici donc le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^x$	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-

On en déduit que :

- f est convexe sur $] -\infty; 0[$,
- f est concave sur $]0; +\infty[$,
- le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de f .

Exercice 2.

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, f(P) = P(X-2) - 2P(X) + P(X+1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .

— On vérifie que f est linéaire.

Soient P et $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X-2) - 2(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(X+1) \\
 &= \lambda P(X-2) + \mu Q(X-2) - 2\lambda P(X) - 2\mu Q(X) + \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) \\
 &= \lambda(P(X-2) - 2P(X) + P(X+1)) + \mu(Q(X-2) - 2Q(X) + Q(X+1)) \\
 &= \lambda f(P) + \mu f(Q)
 \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

- On veut montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , il en est de même de $P(X-2)$, $P(X+1)$, qui sont de même degré que P . Ainsi, $f(P)$ est de degré au plus n comme somme de polynômes de degré n .
- f est donc un endomorphisme.

2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E .

Pour ce faire, il faut calculer les images des polynômes de la base canonique, c'est-à-dire les $f(X^k)$ pour tout $k \in [0, 3]$.

- On pose $P = 1$ le polynôme qui envoie tout le monde sur 1.

$$f(P) = P(X-2) - 2P(X) + P(X+1) = 1 - 2 \times 1 + 1 = 0_E$$

- On pose $P = X$ le polynôme qui envoie X sur X .

$$f(P) = P(X-2) - 2P(X) + P(X+1) = (X-2) - 2X + (X+1) = -1$$

- On pose $P = X^2$ le polynôme qui envoie X sur X^2 .

$$f(P) = P(X-2) - 2P(X) + P(X+1) = (X-2)^2 - 2X^2 + (X+1)^2 = -2X + 5$$

- On pose $P = X^3$ le polynôme qui envoie X sur X^3 .

$$f(P) = P(X-2) - 2P(X) + P(X+1) = (X-2)^3 - 2X^3 + (X+1)^3 = -3X^2 + 15X - 7$$

On en déduit la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le noyau et l'image de f .

On a :

$$\text{Im} f = \text{Vect}\{-1, -2X + 5, -3X^2 + 15X - 7\}$$

De plus, la famille $\{-1, -2X + 5, -3X^2 + 15X - 7\}$ est libre car composée de polynômes de degrés 0 à 2 distincts, c'est donc une base de $\text{Im} f$. Donc $\text{Im} f$ est un sous-espace de dimension 3 et inclus dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est lui-même de dimension 3, et donc :

$$\text{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$$

Le théorème du rang donne alors :

$$\dim \ker f = \dim E - \text{rg}(f) = 4 - 3 = 1.$$

Or $1 \in \ker f$ d'où

$$\text{Vect}\{1\} \subset \ker f$$

De plus, la famille $\{1\}$ est libre car $1 \neq 0_E$, donc la famille $\{1\}$ est une famille libre à un élément de $\ker(f)$ et $\ker(f)$ est de dimension 1, donc

$$\ker f = \text{Vect}\{1\}.$$