

Devoir maison 15 pour le 3/06/26

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n existe.

Soit $x \in [0, +\infty[$ alors soit $x = 0$ et alors $f(x) = 1 \geq 0$. Soit $x > 0$ et alors $\ln(1+x) > \ln(1) = 0$, donc $\frac{x}{\ln(1+x)} > 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et est ≥ 0 ". Alors

Initialisation :

$u_0 = e$ existe et est ≥ 0

Hérédité :

Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors u_n existe et $u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et $u_{n+1} \geq 0$

Conclusion : Par récurrence, on a démontré que u_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Écrire un programme en Python qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N .

```

1 def suite(N):
2     u=np.exp(1)
3     for k in range(1,N+1):
4         u=u/np.log(1+u)
5     return u

```

3. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

— La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

— Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} 1$$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ ce qui prouve que f est continue en 0.

Ainsi, f est continue sur $[0; +\infty[$.

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

On a, au voisinage de 0 :

$$\text{--- } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{--- } \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x) \text{ donc } \frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$$

ce qui donne :

$$\boxed{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} - x + x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2}$$

Or le développement limité précédent donne : $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \underset{0^+}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Comme $\ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x$, on obtient par quotient :

$$\boxed{f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

On a vu que :

--- f est continue sur $[0; +\infty[$.

--- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

--- $f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; +\infty[}$.

7. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

On a vu que :

--- f est continue sur $[0; +\infty[$.

--- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

--- $f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0; +\infty[}$.

8. Établir que :

$$\forall x \geq e-1, \quad f(x) \leq x \quad \text{et} \quad (x+1) \ln(x+1) \geq (x+1)$$

En déduire que :

$$\forall x \geq e-1, \quad f'(x) \geq 0$$

On a :

$$\begin{aligned}
 x \geq e - 1 &\iff 1 + x \geq e \\
 &\iff \ln(1 + x) \geq 1 \quad \text{car } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[\\
 &\iff \frac{1}{\ln(1 + x)} \leq 1 \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0, +\infty[\\
 &\iff \frac{x}{\ln(1 + x)} \leq x \quad \text{car } x > 0 \\
 &\iff f(x) \leq x
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \geq e - 1, f(x) \leq x}$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 x \geq e - 1 &\implies 1 + x \geq e \\
 &\implies \ln(1 + x) \geq 1 \quad \text{car } \ln \text{ est croissante} \\
 &\implies (x + 1) \ln(1 + x) \geq (x + 1) \quad \text{car } (x + 1) > 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \geq e - 1, (x + 1) \ln(1 + x) \geq (x + 1)}$.

Montrons alors que : $\forall x \geq e - 1, f'(x) \geq 0$. On a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\ln(1 + x) - \frac{x}{1 + x}}{(\ln(1 + x))^2} = \frac{(1 + x) \ln(1 + x) - x}{(1 + x) (\ln(1 + x))^2}$$

Pour $x \geq e - 1$, on a vu que : $(x + 1) \ln(1 + x) \geq (x + 1)$ donc $(x + 1) \ln(1 + x) - x \geq 1 > 0$.
De plus, pour $x \geq e - 1 > 0$, $(1 + x) (\ln(1 + x))^2 > 0$.

Donc $\boxed{\forall x \geq e - 1, f'(x) \geq 0}$.

9. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - 1 \leq u_n$$

Par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $\mathcal{Q}(n) : e - 1 \leq u_n$.

— $u_0 = e \geq e - 1$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie, c'est-à-dire $e - 1 \leq u_n$.

Comme $f' \geq 0$ sur $[e - 1; +\infty[$, f est croissante sur $[e - 1; +\infty[$ et on a :

$$\begin{aligned}
 e - 1 \leq u_n &\implies f(e - 1) \leq f(u_n) \\
 &\implies e - 1 \leq u_{n+1} \quad \text{car } f(e - 1) = e - 1
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}(n + 1)$ est vraie.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, e - 1 \leq u_n}$.

10. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L .

D'après la question 8, on a : $\forall x \geq e - 1, f(x) \leq x$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq e - 1$, on peut prendre $x = u_n$ dans la relation précédente ce qui donne : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) \leq u_n \quad \text{soit } u_{n+1} \leq u_n$$

Donc la suite u est décroissante et minorée par $e - 1$ (d'après la question précédente) donc

$\boxed{\text{la suite } u \text{ est convergente}}$.

Notons $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, L vérifie l'équation :

$$f(L) = L \quad \text{soit } L = e - 1$$

d'après les calculs de la question 8 (en remplaçant les inégalités par des égalités).

Finalement, $\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } L = e - 1}$.