
Devoir maison 15 pour le 3/06/26

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n existe.
2. Écrire un programme en Python qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N .
3. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
7. Établir que :

$$\forall x \geq e - 1, \quad f(x) \leq x \quad \text{et} \quad (x+1) \ln(x+1) \geq (x+1)$$

En déduire que :

$$\forall x \geq e - 1, \quad f'(x) \geq 0$$

8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - 1 \leq u_n$$

9. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L .