
TP 5 : Calculs de sommes et du n -ieme terme d'une suite avec une boucle for

1 Calcul du n -eme terme d'une suite

On cherche dans cette partie à calculer le n -eme terme d'une suite définie de façon récursive sans nécessairement retenir en mémoire les termes précédents.

1.1 Suite récurrente d'ordre 1

1.1.1 Un exemple

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 4u_n + 5n \end{cases}$$

On considère la fonction suivante :

```
1 def calcul_suite1(n):  
2     u=3  
3     for k in range(1,n+1):  
4         u=u**2-4*u+5*k  
5     return(u)
```

- Recopier la fonction ci-dessous dans un nouveau script.
- Tester la fonction pour $n=1, 2$ et 3 et calculer parallèlement u_1, u_2 et u_3 sur feuille.
- A quoi correspond la valeur de u à la fin de la boucle.

- Quelle est la différence avec les programmes utilisés lors du TP précédent ?

1.1.2 A vous de jouer

Exercice 1. Soit la suite récurrente (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \ln(u_n + 1) + e^{-3u_n+1} \end{cases}$$

En s'inspirant de l'exemple, écrire une fonction ayant en entrée n et renvoyant la valeur v_n .

1.2 Suite récurrente d'ordre 2

1.2.1 Un exemple

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

```
1 def calcul_suite2(n):
2     a=2
3     b=5
4     for k in range(2,n+1):
5         c=a
6         a=b
7         b=5*b+6*c
8     return(b)
```

- Recopier la fonction cci-dessous dans un nouveau script
- Tester la fonction dans la console pour différents entiers naturel n . A quoi correspond les valeurs de **a** et **b** à la fin de la boucle ?

- **Sur feuille :** En étudiant la suite comme une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifier les résultats précédents.
- A quoi sert la variable **c** ? Que se passerait-il si elle n'apparaissait pas ?

1.2.2 A vous de jouer

Exercice 2. Soit la suite (w_n) définie par

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 5 \\ w_{n+2} = \cos(w_{n+1}) + 2e^{-w_n} \end{cases}$$

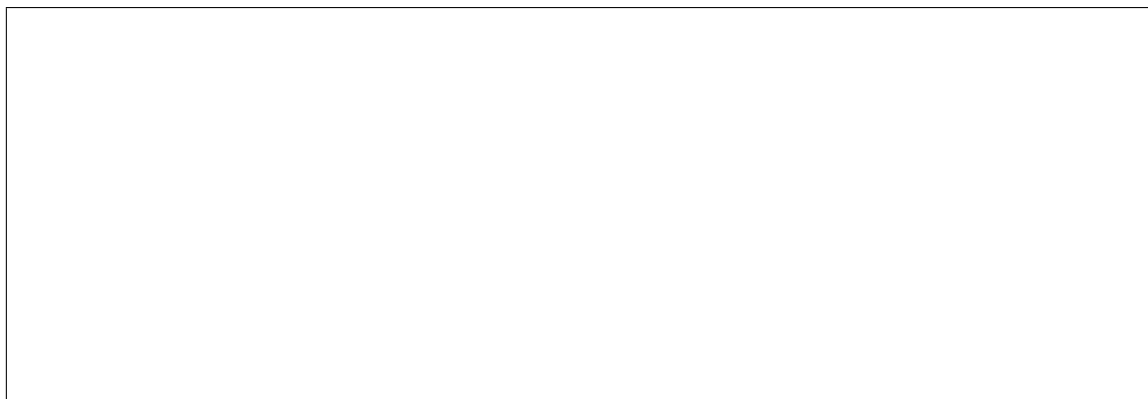
En s'inspirant de l'exemple écrire un programme prenant en entrée **n** et renvoyant la valeur w_n .

2 Calculs de sommes

2.1 Un premier exemple guidé

On cherche à calculer à l'aide de Python $S_n = \sum_{k=1}^n k$ On considère la suite (S_n) .

1. Quel lien y a-t-il entre S_{n+1} et S_n ?
2. En déduire en s'inspirant de la première partie du TP un programme prenant n en entrée et renvoyant la valeur de S_n .



3. Tester la fonction dans la console pour différents entiers naturels n et vérifier à l'aide d'une formule sur les sommes usuelles.

2.2 A vous de jouer

Exercice 3. 1. En s'inspirant de la fonction `calcul somme`, écrire de nouvelles fonctions pour calculer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=1}^5 k^2$ (b) $\sum_{k=1}^{10} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{20} k^2$ (d) $\sum_{k=1}^5 k^3$ (e) $\sum_{k=1}^{10} k^3$

2. **Sur feuille :** Vérifier les résultats à l'aide des formules sur les sommes usuelles.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^n (k^2 + 4k + 4).$$

1. Ecrire une fonction ayant comme argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n .
2. **Sur feuille :** En utilisant la linéarité de la somme, calculer S_n .

3. **Sur feuille :** En utilisant une identité remarquable et un changement d'indice, retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 5. 1. En s'inspirant de la fonction de la Partie 1, écrire une nouvelle fonction ayant comme argument d'entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de $n!$

2. Ecrire une fonction pour calculer les produits suivants :

$$(a) \prod_{k=1}^5 \frac{2^{2k}}{3^k} \quad (b) \prod_{k=1}^{10} \frac{2^{2k}}{3^k} \quad (c) \prod_{k=1}^5 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad (d) \prod_{k=2}^{10} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

3. **Sur feuille :** Vérifier les résultats obtenus en calculant "à la main" ces produits.

2.3 Bonus

Exercice 6. 1. Ecrire une fonction ayant comme argument d'entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

2. Ecrire une fonction ayant comme argument d'entrée un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de

$$T_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

3. Evaluer les deux fonctions précédentes pour différentes valeurs de n et émettre une conjecture sur T_n et S_n .

4. **Sur feuille :** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

5. **Sur feuille :** Démontrer la conjecture de la question 3.