

TD 5 - Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $2A - 3D$.
 (b) Vérifier par le calcul que $(A + D)C = AC + DC$.
 (c) Vérifier par le calcul que ${}^t(AC) = {}^tC {}^tA$.
2. Vérifier que $(AB)C = A(BC)$.

Exercice 2.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Peut-on trouver B telle que $BC = A$?

Exercice 3.

Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. On pose $B_n = A^n + A - 2I$.
 (a) Montrer que $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$.
 (b) Montrer que $A^{n+2} = 2A^{n+1} + A - 2I$.
 (c) Montrer que $B_{n+2} = 2B_{n+1}$.
 (d) Calculer A^n .

Exercice 4.

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de l'exercice 3.

1. Soit P le polynôme $x \mapsto x^2 - 3x + 2$. Déterminer pour tout entier n le reste de la division de $x \mapsto x^n$ par P .
2. En déduire l'expression de A^n .

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. En se basant sur les valeurs de T^2 et T^3 , calculer T^n pour tout entier $n > 0$.
2. En déduire A^n pour tout entier $n > 0$.

Exercice 7.

On dit qu'une matrice M est *nilpotente* si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. Montrer que la matrice $I_n - M$ est inversible et que ;

$$(I_n - M)^{-1} = I_n + M + \dots + M^{k-1}$$

Application : Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Donner une relation de récurrence sur a_n et b_n . En déduire A^n .

Exercice 9.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^n = a_n I + b_n J$.
2. Déterminer A^n .

Exercice 10.

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss :

$$1) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y + 8z = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 11.

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 12.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} x + 2y - z & = a \\ -2x - 3y + 3z & = b \\ x + y - 2z & = c \end{cases}$$

où a , b et c sont des réels donnés.

Exercice 13.

Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 10z = -2 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y + 2w = 6 \\ 3x + 5y - z + 6w = 17 \\ 2x + 4y + z + 2w = 12 \\ 2x - 7z + 11w = 7 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + 2y - z = -1 \\ 4x + 4y - 3z = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 14.

Résoudre et discuter les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + my = -7 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3y + z = -5 \\ -x - 2y + mz = 4 \\ x - my + z = -5 \end{cases}$$

Exercice 15.

Résoudre par la méthode du pivot :

$$1) \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y - z = 3 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x + 3y + 4z + t = 1 \\ 3x + 4y + z + 2t = 1 \\ 4x + y + 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

Exercice 16.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ -12 & -8 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - 2A$
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de x^n par $x^2 - 2x - 8$
4. En déduire A^n en fonction de n .
5. La formule est-elle vraie pour $n = -1$?

Exercice 17.

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $A^2 = 0$.

1. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer, en revanche que $I_n + A$ est inversible

Exercice 18.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^3 - 4A - 2I_3 = 0_3$
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 19.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$
2. En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse
3. Calculer A^n .

Exercice 20.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. A l'aide du binôme de Newton, calculer A^n

Exercice 21.

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n .

Exercice 22 (A4).

Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ 4x - y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Exercice 23.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $J_{i,j} = 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $JAJ = \sigma(A)J$ où $\sigma(A)$ est la somme des termes de A .

Exercice 24.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = 1, \quad b_{i,j} = (-1)^{i+j}$$

Calculer A^p , B^p , AB , BA .