

TP 9 : Approximation de limite de suites

1 A l'aide de l'inégalité des accroissements finis

1.1 Un premier exemple

Reprenons l'exemple du cours. On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]3, 4[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$. Après étude de la suite (u_n) et utilisation de l'inégalité des accroissements finis sur f , on a obtenu que, si $u_0 \in]3, 4[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

où α est l'unique solution de $f(x) = x$ et également la limite de (u_n) .

Ainsi en calculant u_n pour n assez grand on obtient une valeur approchée de α avec une bonne précision.

La fonction suivante permet de calculer une approximation de ℓ à ϵ près où ϵ est l'argument d'entrée de la fonction.

```
1 def approximation1(eps):  
2     u=3.5  
3     n=0  
4     while (1/12)**n>eps:  
5         n=n+1  
6         u=4-1/4*np.log(u)  
7     return u
```

◁ Quel u_0 a été choisi ?

◁ A quoi sert la condition de la ligne 4 ?

◁ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-3}$. Qu'obtenez-vous ?

◁ En déduire une valeur de α à 10^{-3} près

1.2 A vous de jouer

Exercice 1. On pose $f(x) = \frac{\pi}{6} \cos(x)$.

1. Montrer que f possède un unique point fixe α . Et qu'il est compris dans l'intervalle $]0; 2[$
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in]0; 2[$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrer que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{6} |u_n - \alpha|$$

3. En déduire que

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n \times 2$$

4. En déduire la convergence de (u_n) et sa limite.
5. Ecrire une fonction qui étant donné $\epsilon > 0$ permet de calculer une approximation de α à ϵ près.

Exercice 2. On considère la fonction f définie pour $x \geq 0$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$. On considère aussi la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$
2. Soit $I = \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$. Montrer que $f(I) \subset I$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
4. Démontrer que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$
7. Ecrire une fonction qui étant donné $\epsilon > 0$ permet de calculer une approximation de α à ϵ près.

2 Cas des suites adjacentes

▷ Rappeler la définition de suites adjacentes.

Rappelons que, d'après le théorème sur les suites adjacentes, elles convergent vers une **limite commune** ℓ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Ainsi, en calculant u_n et v_n pour n assez grand, on obtient un encadrement de ℓ avec une bonne précision. C'est l'objet de cette partie.

2.1 Un premier exemple

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On admet que ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers une même limite ℓ .

La fonction suivante permet de calculer une approximation de ℓ à ε près, où ε est l'argument d'entrée de la fonction.

```

1 def approximation2(eps):
2     u=1
3     v=2
4     n=1
5     while np.abs(v-u)>eps:
6         n=n+1
7         u=u+1/n**2
8         v=u+1/n
9     return u,v

```

▷ Que calcule-t-on aux lignes 2 et 3 ?

▷ A quoi correspond la quantité `np.abs(v-u)` ?

▷ Expliciter avec des mots la condition de la ligne 5. ▷ Que fait-on aux lignes 7 et 8 ?

▷ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-3}$. Qu'obtenez-vous ?

- ▷ En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

- ▷ Tester votre programme pour $\epsilon = 10^{-6}$. Qu'obtenez-vous ?

- ▷ En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

Remarques

1. On peut démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Pour $\epsilon = 10^{-3}$, Python donne le résultat instantanément. En revanche, il faut attendre 2,3 secondes pour obtenir le résultat pour $\epsilon = 10^{-6}$. Cela s'explique par la vitesse de convergence très lente de (u_n) et (v_n) . Il faut en effet 1000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision 10^{-3} et 1000000 itérations pour obtenir ℓ avec une précision 10^{-6} .

2.2 A vous de jouer

Exercice 3.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite.
2. Ecrire une fonction qui, étant donné un entier naturel n , calcule u_n et v_n .
3. Ecrire une fonction qui, étant donné $\epsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à ϵ près.

Exercice 4.

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1, b_0 = 2$ et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

On admet que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers une limite commune ℓ

1. Ecrire une fonction qui, étant donné un entier naturel n , calcule a_n et b_n .
2. Ecrire une fonction qui, étant donné $\epsilon > 0$, permet de calculer une approximation de la limite commune des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5.

On considère les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$v_0 = 1, \quad w_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}w_n.$$

1. Ecrire un programme qui, étant donné un entier naturel n , calcule v_n et w_n .
2. On pose $t_n = v_n - w_n$.
 - (a) Montrer que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - (b) Exprimer t_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq w_n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n)$.
3.
 - (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - (b) Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ .
4.
 - (a) Ecrire une fonction qui, étant donné $\varepsilon > 0$, permet de calculer une approximation de ℓ à ε près.
 - (b) Vers quelle limite semblent converger $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
5. On pose $s_n = v_n + w_n$.
 - (a) Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
 - (b) En déduire la valeur de ℓ .