

TP 11 : Méthode des rectangles

1 Introduction au problème : Intégrales et sommes de Riemann.

Le but de ce TP est de comparer différentes techniques d'approximation d'intégrales : la méthode des rectangles à gauche, la méthode des rectangles à droite et la méthode du point milieu.

Pour cela, on étudiera ces méthodes pour approcher le calcul de

$$\int_0^1 e^t dt$$

▷ Calculer à la main

$$\int_0^1 e^t dt$$

▷ Définir une fonction **f** prenant x en entrée et renvoyant e^x .

2 Méthode des rectangles à gauche

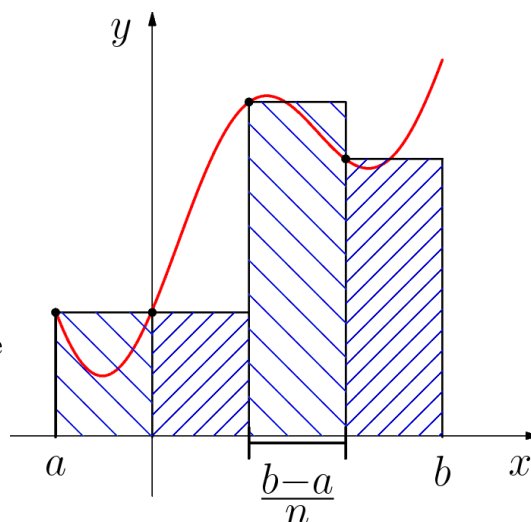
On rappelle que :

Proposition 2.0.1.

Soit **f** continue sur $[a, b]$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

Numériquement, cette approximation d'une intégrale s'appelle **méthode des rectangles à gauche**.



Ainsi pour approcher la valeur de $\int_a^b f(t) dt$ on pourra calculer $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ pour n grand.

▷ Ecrire un programme RG prenant en entrée :

- deux nombres **a** et **b** : les bornes de l'intégrales
 - une fonction **f**
 - un entier **n** : le nombre de subdivision de l'intervalle $[a, b]$,
- et renvoyant la valeur donnée par la méthode des rectangles à gauche :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

(On pourra utiliser une variable $h = \frac{b-a}{n}$ à l'intérieur du programme)

- ▷ On veut comparer la valeur approchée obtenue avec la valeur exacte de l'intégrale pour différentes valeurs de n .

- Compléter la fonction **ErreurRG(n)** qui calcule la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte de l'intégrale.

```

1  def ErreurRG(n):
2      exa=exp(1)-1 //Valeur exacte de l intégrale
3      appr=..... //Valeur approchée de l intégrale
4      erreur=..... //Erreur d'approximation
5      return erreur

```

- Compléter le script (*) suivant qui permet de tracer l'évolution de l'erreur en fonction de n .

```

1  n=range(100,10000,100)
2  err=np.zeros(len(n))
3  for i in range(len(n)):
4      err[i]=.....
5  plt.plot(...,'x', label="Erreur par méthode des rectangles à gauche"),
6  plt.legend(),
7  plt.xlabel("Nombre de sous intervalles n"),
8  plt.ylabel("Différence entre solution exacte et approchée")

```

3 Méthode des rectangles à droite

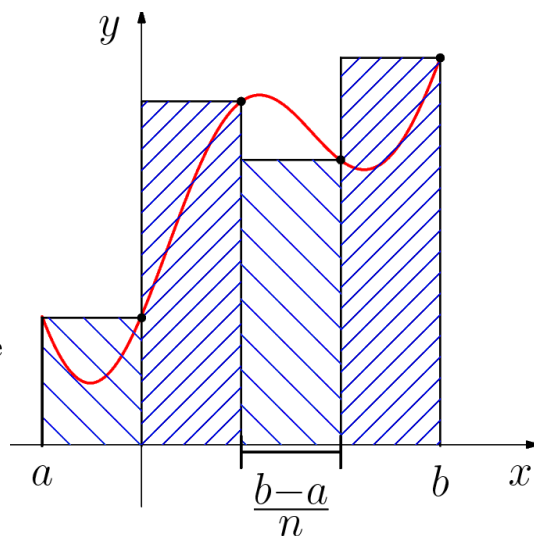
On rappelle que :

Proposition 3.0.1.

Soit f continue sur $[a, b]$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Numériquement, cette approximation d'une intégrale s'appelle **méthode des rectangles à droite**.



▷ Ecrire un programme **RD** prenant en entrée :

- deux nombres **a** et **b** : les bornes de l'intégrales
- une fonction **f**
- un entier **n** : le nombre de subdivision de l'intervalle $[a, b]$,

et renvoyant la valeur donnée par la méthode des rectangles à gauche :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

▷ Définir une fonction **ErreurRD** prenant en entrée **n** et renvoyant la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte de l'intégrale.

▷ Compléter le script (*) pour qu'il trace l'évolution de l'erreur dans les deux méthodes en fonction de n .

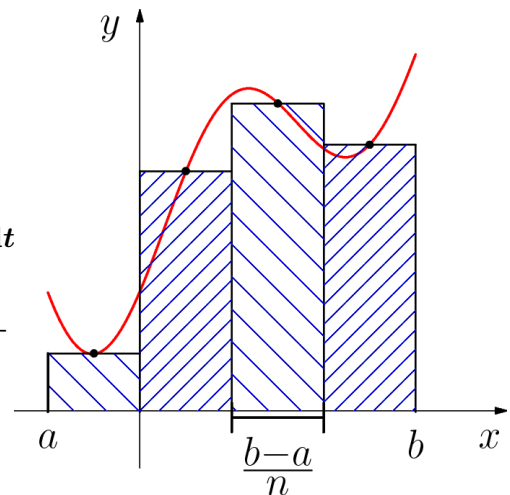
4 Méthode du point milieu

Proposition 4.0.1.

Soit f continue sur $[a, b]$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2k+1)}{2} \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

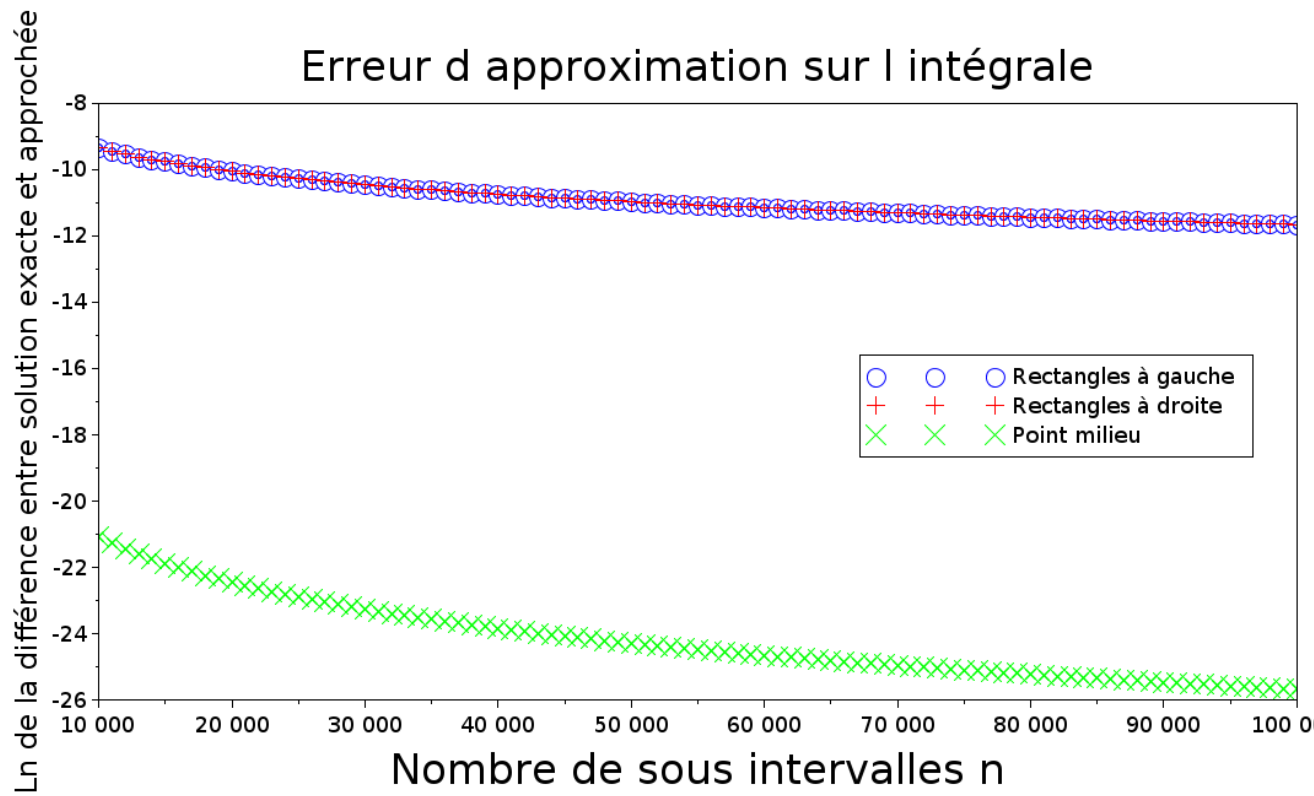
Numériquement, cette approximation d'une intégrale s'appelle **méthode du point milieu**.



- ▷ Mettre en oeuvre cette méthode via une fonction `PM(a,b,n,f)`.

- ▷ Comparer la valeur approchée obtenue avec la valeur exacte de l'intégrale 1 pour différentes valeurs de n via une fonction `ErreurPM(n)`. Comparer ces résultats avec ceux des méthodes précédentes en complétant le script (*).

- ▷ Pour se représenter plus précisément les échelles, tracer le $\ln$ de l'erreur en fonction de n . On trouve alors une courbe qui a l'allure suivante :



On remarque que le $\ln$ de l'erreur avec la méthode du point milieu est deux fois plus faible qu'avec les méthodes des rectangles. On dit que la méthode du point milieu est d'ordre deux fois plus élevée que les méthodes des rectangles.