
TP 12 : Bilan premier semestre.

1 Suites

Exercice 1.

On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$. On définit alors la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

1. Ecrire une fonction **Python** **f** prenant en argument x et renvoyant $f(x)$.

2. Ecrire une fonction **Python** prenant n en entrée et renvoyant un tableau contenant les n premiers termes de la suite u .

3. Ecrire une commande permettant de tracer les 100 premiers termes de la suite (u_n) . La suite semble-t-elle converger ?

4. On admet

- qu'il existe un unique $r \in [3, 4]$ tel que $f(r) = r$.
- que l'intervalle $I = [3, 4]$ est stable par f .
- que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
- que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.
- que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{12} |u_n - r|$.
- que $|u_n - r| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

5. Ecrire un programme prenant p en entrée et renvoyant une approximation de r à 10^{-p} près.

2 Sommes

Exercice 2.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x^2+3x}$. On cherche à calculer une approximation à 10^{-3} de

$$I = \int_0^1 g(x) dx$$

1. Ecrire un programme Python prenant x en entrée et renvoyant $g(x)$.

2. On rappelle que , si f est continue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Ecrire un programme Python prenant en entrée n et renvoyant une approximation de $\int_0^1 g(x) dx$ en utilisant ce résultat.

3. On admettra que

$$\left| I - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{3e^3}{n^2}$$

(Cela peut se montrer à l'aide de l'Inégalité des accroissements finis en majorant $|g'(x)|$) A l'aide de Python déterminer une approximation de I à 10^{-3} près.

3 Matrices

Exercice 3.

On cherche à résoudre le système suivant à l'aide de Python :

$$\begin{cases} x + 3y + z - t &= 13 \\ 2x + y + 2z + t &= 4 \\ -x + 2y - z + 3t &= 14 \\ 7x + y + 4z - 2t &= 5 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle (de la forme $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $X = (x, y, z, t)$ et $Y \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$).

2. Définir les matrices A et Y sur Python

3. Résoudre le système à l'aide de Python

4 Bonus :

Uniquement si vous avez fini la partie informatique vous pouvez montrer les différentes affirmation de l'exercice 1. 4.