

Chapitre 6

Applications

1 Les applications

1.1 Définition

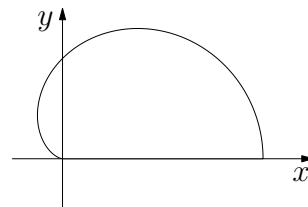
Définition 1.1.1. Une **application** est définie par un ensemble E de départ, un ensemble F d'arrivée et une relation qui à tout élément x de E associe **un unique** élément y de F . On note :

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \rightarrow F \\ & & x \mapsto y \end{array}$$

y est l'**image** de x et x est **un antécédent** de y .

Exemple 1.1.1. 1. La fonction carrée est-elle une application ?

2. Cette courbe représente-t-elle une application ?



Méthode 1.1. Pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est une **application**, on montre qu'elle **envoie tout $x \in E$ sur une unique image**.

Définition 1.1.2. Soit E un ensemble. On appelle identité de E l'application de E dans E , notée Id_E et définie par

$$\forall x \in E, \text{Id}_E(x) = x$$

1.2 Ensemble image

Définition 1.2.1. Soit f une application de E dans F et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **image de A par f** l'ensemble formé par les images des éléments de A et on note :

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{F} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

on a donc :

$$y \in f(A) \iff y \in F \text{ et } \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y$$

Exemple 1.2.1. En utilisant un tableau de variations, déterminer les images de l'ensemble A par l'application f définie sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, $A = [2, 3]$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $A = [2, 3[$

3. $f(x) = \sin(x)^2$, $A =] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$

1.3 Prolongement et restrictions

Définition 1.3.1. Soit $f : E \rightarrow F$, $E_1 \subset E$ et $E \subset E_2$.

La restriction de f à E_1 est notée

$$f|_{E_1} : E_1 \rightarrow F$$

et définie par : $\forall x \in E_1$, $f|_{E_1}(x) = f(x)$

Un prolongement de f à E_2 est toute application $g : E_2 \rightarrow F$ telle que $g|_E = f$.

Remarque 1.3.1. Il n'y a en général pas unicité du prolongement.

Exemple 1.3.1. On considère la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \{-1; 1\}$ définie par $f(n) = (-1)^n$.

1. Donner la restriction de f à A l'ensemble des entiers pairs.

2. Donner un prolongement de f à l'ensemble $\mathbb{R}$.

2 Fonctions caractéristiques d'ensembles

Définition 2.0.1. Soit E un ensemble et A une partie de E . La fonction caractéristique, ou indicatrice, de A est la fonction $1_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 2.0.1. Soit A et B deux parties de E . Montrer que :

1. $1_A = 1_B \iff A = B$

2. $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$

3 Composition des applications

Définition 3.0.1. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. On définit la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Remarque 3.0.1.

- On ne peut pas toujours composer des applications par exemple si l'ensemble d'arrivée de f n'est pas inclus dans l'ensemble de départ de g .
- On n'a pas en général commutativité, c'est-à-dire $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple 3.0.1. Cf les exemples dans le chapitre fonctions usuelles

Proposition 3.0.1. La composition des applications est associative, c'est-à-dire

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Proposition 3.0.2. Si $f : E \rightarrow F$, on a évidemment

$$\text{Id}_F \circ f = f \text{ et } f \circ \text{Id}_E = f$$

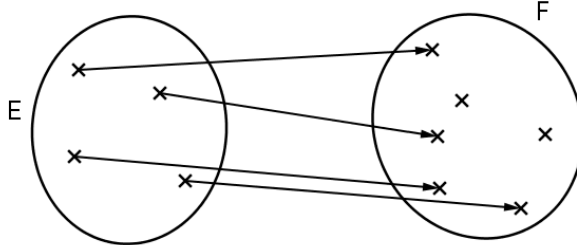
4 Propriétés des applications

4.1 Injection et surjection

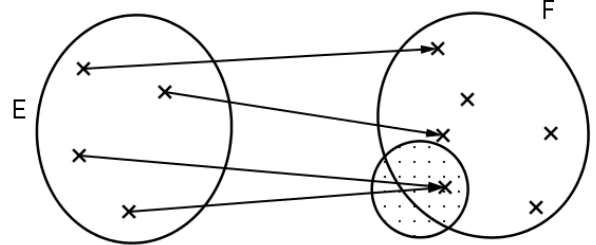
Définition 4.1.1. L'application $f : E \rightarrow F$ est **injective** si elle vérifie une des trois propriétés suivantes :

- i) Tout élément de F possède au plus un antécédent
- ii) $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- iii) $\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Fonction injective :



Fonction non injective :



Méthode 4.1. Pour montrer qu'une application est **injective**, on considère $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.

Exemple 4.1.1. Montrer que l'application suivante est injective :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Proposition 4.1.1. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

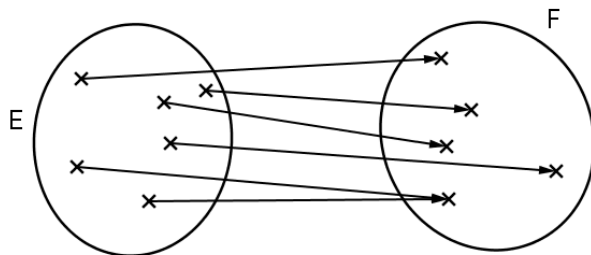
1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Démonstration.

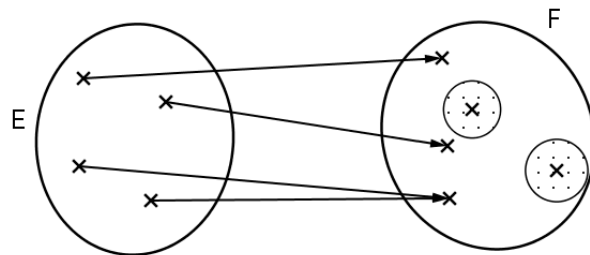
Définition 4.1.2. L'application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si elle vérifie l'une des trois propriétés

- i) Tout élément de F possède (au moins) un antécédent
- ii) $f(E) = F$
- iii) $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$

Fonction surjective :



Fonction non surjective :



Méthode 4.2. Pour montrer qu'une application est **surjective**, on considère $y \in F$ et on montre qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 4.1.2. Montrer que l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = |n|$ est surjective.

Proposition 4.1.2. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

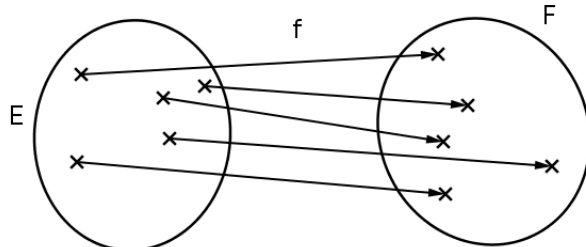
1. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Démonstration.

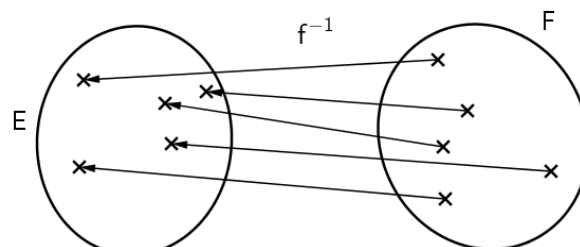
4.2 Bijection

Définition 4.2.1. Une **application** $f : E \rightarrow F$ est **bijjective** si elle est injective et surjective. Dans ce cas tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent. L'application faisant correspondre à un tel élément son antécédent est l'**application réciproque**, notée f^{-1} .

Application bijective f :



Application réciproque f^{-1} :



Théorème 4.2.1 (Théorème de la bijection). Si f est une application définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f est une bijection de I sur l'intervalle image de I par f , $f(I)$.

Méthode 4.3.

- Pour montrer qu'une **application** est **bijjective** d'un intervalle I dans un intervalle J , on montre qu'elle est injective et surjective. On peut aussi utiliser le théorème de la bijection.
- Pour déterminer l'**application réciproque** d'une **fonction usuelle** f bijective, on raisonne par **analyse-synthèse** en exprimant x en fonction de y à partir de l'expression $y = f(x)$.

Exemple 4.2.1. Montrer que l'application $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bijective.

Théorème 4.2.2. Soit $f : E \rightarrow F$.

f est **bijective** si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$.
Alors $g = f^{-1}$.

Proposition 4.2.3. Si f est une bijection de E dans F , alors f^{-1} est une bijection de F dans E et

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Proposition 4.2.4. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective, et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Exemple 4.2.2. Montrer que :

1. Si E est un ensemble, Id_E est bijective, et $\text{Id}_E^{-1} = \text{Id}_E$.

2. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1[$ et déterminer f^{-1} .