

TP 15 : Approximation de solution d'équation.

Dans ce TP on s'intéresse à des fonctions f vérifiant les hypothèses suivantes sur un intervalle $[a, b]$:

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est strictement monotone sur $[a, b]$;
- $f(a) \times f(b) < 0$, autrement dit $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

Le théorème de la bijection nous garantit que l'équation

$$f(x) = 0$$

admet une unique solution $c \in]a, b[$.

On souhaite étudier des méthodes de calcul numérique permettant de calculer une valeur approchée de c avec une erreur au plus ϵ .

1 L'équation à résoudre

Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2} - x$

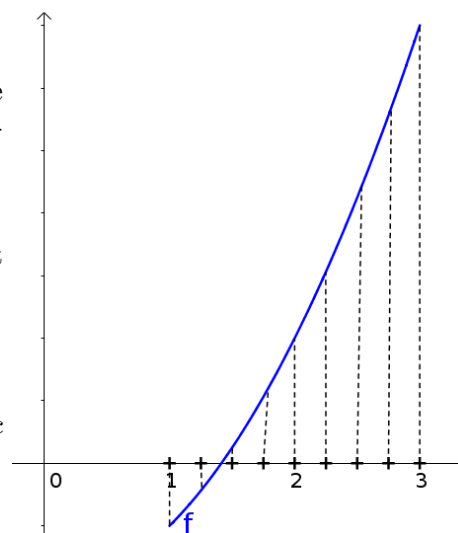
1. Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution c sur $]0, 1[$.
2. Créer une fonction `f` permettant de définir la fonction f de l'énoncé.

2 Méthode du balayage

2.1 Principe de la méthode

Méthode du balayage :

1. On divise le segment $[a, b]$ en intervalle de largeur ϵ
On choisit en général un ϵ de la forme $\epsilon = \frac{b-a}{N}$ de manière à pouvoir diviser l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de longueur ϵ .
2. On regarde le signe de $f(a) \times f(a + \epsilon)$.
 - Si $f(a) \times f(a + \epsilon) \leq 0$ alors la solution c appartient à l'intervalle $]a, a + \epsilon]$;
 - Sinon on passe à l'étape suivante.
3. On regarde le signe de $f(a + \epsilon) \times f(a + 2\epsilon)$.
 - Si $f(a + \epsilon) \times f(a + 2\epsilon) \leq 0$ alors la solution c appartient à l'intervalle $]a + \epsilon, a + 2\epsilon]$;
 - Sinon on passe à l'étape suivante.
4. etc...



2.2 Programmation

1. Compléter le programme suivant pour qu'il approche c à ε près par la méthode du balayage.

```
1 def Balayage(eps):
2     a=...
3     b=...
4     x=np.arange(a,b,eps)
5     i=...
6     while ..... :
7         i=.....
8     return .....
```

2. Modifier cette fonction pour créer une fonction `Balayage2` qui prend comme argument d'entrée l'erreur ε et qui renvoie un intervalle de largeur ε contenant c .

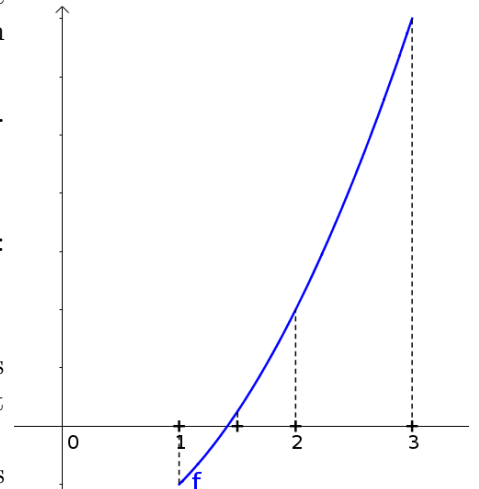
Indication : On pourra renvoyer en sortie une chaîne de caractère de la forme 'c appartient à l'intervalle [x[i],x[i+1]],' à l'aide de la commande `print()`

3 Méthode de la dichotomie

3.1 Principe de la méthode

Méthode de dichotomie :

1. On divise l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalles de même taille. Le milieu de cet intervalle est $m = \frac{a+b}{2}$. On obtient donc deux intervalles $[a, m]$ et $[m, b]$.
2. Si $f(a) \times f(m) \leq 0$ alors c est dans l'intervalle $[a, m]$. Sinon c est dans l'intervalle $[m, b]$.
3. On garde l'intervalle contenant c , autrement dit :
 - si c est dans $[a, m]$, alors on effectue l'opération : $b = m$;
 - sinon on effectue l'opération : $a = m$.
4. On répète alors les trois étapes ci-dessus autant de fois que nécessaire pour se rapprocher autant que l'on veut de la solution.
Si l'on souhaite obtenir une précision ε on s'arrête dès que l'intervalle atteint une largeur inférieure à ε , autrement dit dès que $b - a < \varepsilon$.



3.2 Programmation

1. Compléter le programme suivant. Il permet d'approcher c par la méthode de la dichotomie à ε près.

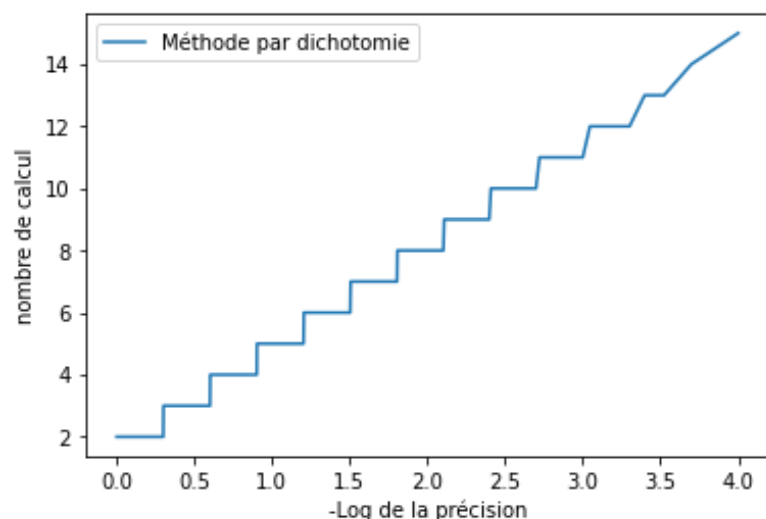
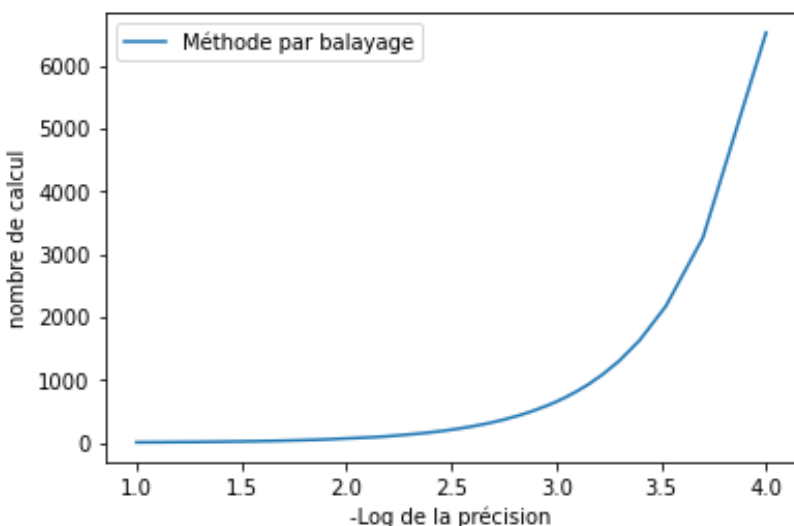
```
1 def dichotomie(eps):
2     a=0
3     b=1
4     while ..... :
5         m=....
6         produit=....*....
7         if produit<=0 :
8             ....
9         else :
10            ....
11     return m
```

2. Utiliser ce programme pour en créer une fonction `dichobis` qui prend comme argument d'entrée la précision ε et qui renvoie le premier intervalle de largeur inférieure à ε contenant c obtenu par la méthode de la dichotomie.

4 Comparaison des deux méthodes

1. Pour ce faire on fixera une valeur de ε (par exemple $\varepsilon = 0.01$) et on déterminera le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre c avec une précision ε pour chaque méthode. Ajouter dans les programmes un compteur renvoyant le nombre d'étapes de calcul effectuées. Laquelle de ces deux méthodes semble être la plus efficace ?
2. On a tracé sur deux fenêtres graphiques le nombre d'étapes nécessaires en fonction de la précision voulue pour chacune de ces méthodes.

On obtient des graphiques qui illustrent la très grande efficacité de la méthode de dichotomie comparée à la méthode de balayage.



5 Une application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine. La fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par

$$g(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$$

représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $g(x)$ en centaines d'euros.

Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 euros. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros.

1. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2. (a) Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 5]$.
(b) Grâce à la méthode de dichotomie, donner un encadrement à $\varepsilon = 0.01$ près de la solution c de l'équation $B(x) = 0$.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.