

Chapitre 1

Compléments sur les espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, n et p des entiers naturels non nuls.

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1.

Un **$\mathbb{R}$ -espace vectoriel** est un ensemble E muni de deux lois :

- une loi $+$ d'addition de deux éléments de E ,
- une loi $\cdot$ de multiplication d'un élément de $\mathbb{R}$ et d'un élément de E ,

qui vérifient un certain nombre de propriétés de calcul vues en première année.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.

Remarque 1.1.1.

Il faut surtout retenir qu'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est une structure qui permet :

- d'additionner deux vecteurs,

Si u et v sont deux vecteurs, alors $u + v$ est un vecteur.

- de multiplier un vecteur par un scalaire,

Si α est un scalaire et u est un vecteur alors $\alpha \cdot u$ est un vecteur.

- et donc plus généralement d'effectuer des **combinaisons linéaires**.

Si $u_1, \dots, u_p$ sont p vecteurs et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ p scalaires, alors

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_p \cdot u_p$$

est un vecteur, appelé combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_p$.

Proposition 1.1.1 (Espaces vectoriels usuels).

Les ensembles suivants, munis de leur lois usuelles sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

- | | |
|---|---|
| • $\mathbb{R}^n$ | • $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles |
| • $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ | • $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ |
| • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. | • Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ |

Remarque 1.1.2.

En pratique on ne montrera pas qu'un ensemble est un espace vectoriel mais on montrera que c'est un sous-espace vectoriel (voir partie suivante) d'un des espaces vectoriels usuels ci-dessus

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1.

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si $F \subset E$ et $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Cela revient à dire que

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$

Exemple 1.2.1.

- $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .
- L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}_n[x]$, l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$

Définition 1.2.2 (Espaces vectoriels engendré par une famille).

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par la famille** $(u_1, \dots, u_p)$ et on note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_p \in E$.

Autrement dit :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_p \cdot u_p, (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p\}$$

Proposition 1.2.1.

- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_p$, alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset F$.
- Pour tout $i \neq j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_j), \dots, u_i, \dots, u_p), \\ \text{Vect}(u_1, \dots, u_i + \lambda \cdot u_j, \dots, u_p) &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p), \\ \text{Vect}(u_1, \dots, \mu \cdot u_i, \dots, u_p) &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p)\end{aligned}$$

- u_p est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{p-1}$ si et seulement si :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$$

Méthode 1.1 (Montrer qu'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E).

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E on peut procéder de deux manières :

1. Soit en utilisant la caractérisation découlant de la définition 1.2.1. On montre alors que
 - $F \neq \emptyset$ en montrant généralement que $0_E \in F$
 - $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in F$.

Pour la rédaction de ce deuxième point on procèdera de la manière suivante :

Soient $u, v \in F$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda u + \mu v \in F$. Calculons :

$$\lambda u + \mu v = \dots\dots\dots$$

On vérifie ensuite que $\lambda u + \mu v$ vérifie bien les conditions d'appartenance à F .

2. Soit en utilisant qu'un Vect est toujours un sous-espace vectoriel et en réécrivant F sous forme de Vect . Pour cela
 - (i) on part d'un vecteur u écrit avec ses coordonnées
 - (ii) on regarde quelles équations doivent vérifier les coordonnées pour que u soit dans F
 - (iii) on échelonne le système d'équations à l'aide du pivot de Gauss
 - (iv) on "termine" la résolution pour réécrire le vecteur u avec un minimum de variables (qui n'ont alors plus de lien entre elles)
 - (v) on factorise par chacune des variables pour faire apparaître les vecteurs générateurs de F .

Remarque 1.2.1.

- La première méthode, bien exécutée, fonctionne toujours mais servira davantage dans les exercices plus théoriques : théorème général, dimension infinie, "dimension n "
- La deuxième méthode sera utilisée dans des cas concrets généralement en "petite" dimension. Elle est très utile pour entamer la suite de l'exercice qui consiste en général à déterminer une base de F .

Exemple 1.2.2.

1. Montrer en utilisant les deux méthodes que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P'(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Montrer que, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Montrer que $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A \text{ antisymétrique}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

4. Montrer que $\mathbb{R}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles libres

Définition 2.1.1.

Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille libre** (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont linéairement indépendants) si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0) \right).$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **liée** (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont linéairement dépendants), ce qui s'écrit :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0), \quad \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E.$$

Remarque 2.1.1.

- Une famille composée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Une famille composée de **deux** vecteurs non colinéaires (non proportionnels) est libre.
- ATTENTION : cela ne se généralise pas à trois vecteurs ou plus.
- Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Une famille de polynômes de degré 2 à 2 distincts est libre.
- Une famille de matrices-colonne ou de n -uplets échelonnée est libre.

Exemple 2.1.1.

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$

2. $\{P_1, P_2, P_3\}$ avec $P_1 = 5$, $P_2 = 3x - 4$, $P_3 = 3x^2 + 4x - 2$

3. $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 0)\}$

4. $\{(1, 4, 5, -2), (0, 0, 7, 3), (0, -4, 6, 1)\}$

5. Montrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est libre.

Proposition 2.1.1.

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

2.2 Familles génératrices

Définition 2.2.1.

Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est dite génératrice de E si :

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p),$$

ce qui peut également s'écrire :

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i.$$

Remarque 2.2.1.

La décomposition du vecteur u n'est pas nécessairement unique : il peut y avoir plusieurs combinaisons linéaires de $(u_1, \dots, u_p)$ égales au même vecteur.

Exemple 2.2.1. Montrer que la famille $\{(1, 2), (2, -1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.2.2. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0, x - z = 0\}$

Proposition 2.2.1. Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Exemple 2.2.3. $\{(1, 2), (2, -1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc il en est de même de $\{(1, 2), (2, -1), (3, 1)\}$.

2.3 Bases

Définition 2.3.1.

Une famille de vecteurs de E libre et génératrice est appelée **base** de E .

Proposition 2.3.1. Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** .

Exemple 2.3.1.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et préciser les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Exemple 2.3.2 (Bases canoniques).

- $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \dots, e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{eme position}}{1}, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ d'indice (i, j) : $E_{i,j}$ est la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i, j) .

La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dite base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $\mathbb{R}_n[x]$.

Dans $\mathbb{R}_n[x]$, $(1, x, \dots, x^n)$ est une base (dite canonique de $\mathbb{R}_n[x]$).

2.4 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 2.4.1.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout vecteur u il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

- Ces nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** .
- On appelle **matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne, notée $M_{\mathcal{B}}(u)$, de ses coefficients dans la base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Exemple 2.4.1.

On considère $\mathbb{R}_n[x]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

1. Justifier que la famille $\mathcal{F} = (1, (1+x), \dots, (1+x)^k, \dots, (1+x)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Soit $P = (1+x)^n$. Donner la matrice des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_c$, puis dans la base $\mathcal{F}$.

Définition 2.4.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, une famille de vecteurs de E . On appelle **matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$** , et on note $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = M_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j -ème colonne est $M_{\mathcal{B}}(u_j)$:

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (M_{\mathcal{B}}(u_1) | M_{\mathcal{B}}(u_2) | \dots | M_{\mathcal{B}}(u_p)) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \dots & m_{2,j} & \dots & m_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

où $u_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i$ pour tout $1 \leq j \leq p$.

Exemple 2.4.2.

- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$
- Pour $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ sa base canonique, et $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 0, 1) \in E$, on obtient :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ et $u = (2, 0, 4)$. Déterminer $M_{\mathcal{B}}(u)$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on définit le polynôme $P_i(x) = (x + a)^i$. Ecrire la matrice de la famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$.

2.5 Dimension

Définition 2.5.1.

On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie de E .

Proposition 2.5.1.

- Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.
- De toute famille génératrice finie de E , on peut extraire une base de E (Théorème de la base extraite)
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E (Théorème de la base incomplète)

Théorème 2.5.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal n . L'entier s'appelle la **dimension de E** et est notée $\dim(E)$.

Exemple 2.5.1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.

Proposition 2.5.3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E , $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . Alors

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$$

Et

- $\text{Card}(\mathcal{L}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{L}$ est une base de E .
- $\text{Card}(\mathcal{G}) = \dim(E) \Leftrightarrow \mathcal{G}$ est une base de E .

Corollaire 2.5.4.

Soit E un espace de dimension n . Une famille de vecteur $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si elle vérifie deux des trois points suivants :

- $\mathcal{F}$ est libre
- $\mathcal{F}$ est génératrice
- $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$

Exemple 2.5.2. Montrer que $((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Proposition 2.5.5 (Dimension et sous-espace vectoriel).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E . Alors

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
- $F = E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$

2.6 Rang d'une famille de vecteur, rang d'une matrice

Définition 2.6.1.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E . On appelle **rang de** $(u_1, \dots, u_p)$ et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Proposition 2.6.1.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Alors :

- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \min(n, p)$.
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p = n$

Définition 2.6.2.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle **rang de** M , et on note $\text{rg}(M)$ le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 2.6.1. Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M)$. Donc le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Méthode 2.1 (Calcul du rang d'une matrice). Pour calculer le rang d'une matrice A , on échelonne la matrice à l'aide du pivot de Gauss. Le rang de A est alors le nombre de pivots non nuls de la matrice échelonnée obtenue.

Méthode 2.2 (Calcul du rang d'une famille). Pour calculer le rang d'une famille de vecteur $\mathcal{F}$, on écrit la matrice de $\mathcal{F}$ dans une base $\mathcal{B}$ de E puis on calcule le rang de cette matrice.

Exemple 2.6.1. Dans $\mathbb{R}_2[x]$, Calculer le rang de la famille (P_1, P_2, P_3) où $P_1 = x+1$, $P_2 = 4x^2+3x+4$, $P_3 = 2x^2 - x + 4$.

Proposition 2.6.2.

Supposons E de dimension n , et soit $\mathcal{B}$ une base de E .

$$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible}$$

Dans ce cas $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est appelée matrice de passage

Méthode 2.3. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension n , on peut :

- (i) Ecrire la matrice de $\mathcal{F}$ dans une base $\mathcal{B}$ connue de E (généralement la base canonique)
- (ii) Montrer que la matrice $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est de rang n (et donc inversible) à l'aide du pivot de Gauss.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3.1.1.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , on appelle **somme de F et G** et on note $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \{x + y, x \in F, y \in G\}$$

Ainsi :

$$z \in F + G \Leftrightarrow \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y$$

Proposition 3.1.1.

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

□

Proposition 3.1.2.

En dimension finie, si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_q)$ alors

$$F + G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$$

Proposition 3.1.3 (Formule de Grassmann).

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Définition 3.1.2 (Somme directe).

On dit que la somme $F + G$ est **directe** si pour tout $z \in F + G$, la décomposition $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ est unique, c'est-à-dire :

$$\forall z \in F + G, \exists! (x, y) \in F \times G, z = x + y$$

On note alors $F \oplus G$

Proposition 3.1.4.

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Alors il y a équivalence entre :

1. F et G sont en somme directe ;
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. $\forall (x, y) \in F \times G, x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E$
4. $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$ (en dimension finie)
5. la concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$. (en dimension finie)

Définition 3.1.3 (Espaces supplémentaires).

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$. Soit :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \forall z \in E, \exists!(x, y) \in F \times G, z = x + y.$$

Théorème 3.1.5 (Caractérisation en dimension finie).

Soit E un espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Il y a équivalence entre :

- | | |
|--|--|
| 1. $E = F \oplus G$ | 2. $\begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ \dim E &= \dim F + \dim G \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} F + G &= E \\ \dim E &= \dim F + \dim G \end{cases}$ | 4. La concaténation des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de E . |

Méthode 3.1. Pour montrer que deux espaces sont supplémentaires on utilise généralement les caractérisations 2 ou 4 qui sont en général les plus simples à établir.

Exemple 3.1.1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} ; \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1)) \text{ et } H = \text{Vect}((1, 0, 0)).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.

2. Même question avec F et H

3. Que peut-on en conclure ?

Proposition 3.1.6. Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

3.2 Somme de p sous-espaces vectoriels

3.2.1 Somme simple

Définition 3.2.1.

Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

On appelle **somme de** $F_1, \dots, F_p$ et on note $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ ou $\sum_{i=1}^p F_i$ l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_p, x_i \in F_i\}.$$

Ainsi :

$$x \in \sum_{i=1}^p F_i \Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = x_1 + \dots + x_p.$$

Exemple 3.2.1.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Notons $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ et $\mathcal{D}$ respectivement l'ensembles des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n, n) . Ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}.$$

Proposition 3.2.1.

$\sum_{i=1}^p F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 3.2.2. Si les F_i sont de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^p F_i$ est de dimension finie et :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

Démonstration. La concaténation des bases des F_i est génératrice de $\sum_{i=1}^p F_i$. □

3.2.2 Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Définition 3.2.2.

Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel E . On dit que la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est **directe**, et on note $\bigoplus_{i=1}^p F_i$, si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p F_i, \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad x = x_1 + \dots + x_p.$$

Vocabulaire : On dit que $F_1 + \dots + F_n$ est directe, ou bien que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe ou que $F_1, \dots, F_n$ sont linéairement indépendant.

Proposition 3.2.3.

La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad x_1 + \dots + x_p = 0_E \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0_E.$$

Exemple 3.2.2.

Dans l'exemple 3.2.1, on a même $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}$.

Théorème 3.2.4 (Caractérisations en dimension finie).

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , et $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.

Les assertions suivantes sont équivalents :

1. les sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe ;
2. la concaténation des $\mathcal{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$;
3. $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

3.2.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 3.2.3.

Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On dit que les sous-espaces F_i sont **supplémentaires dans E** si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$. Ainsi, on dispose de la caractérisation :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i \Leftrightarrow \forall x \in E, \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \quad x = x_1 + \dots + x_p.$$

Proposition 3.2.5 (Caractérisations en dimension finie).

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \ E = \sum_{i=1}^p F_i, \quad (ii) \ \sum_{i=1}^p F_i = \bigoplus_{i=1}^p F_i, \quad (iii) \ \dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

alors $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Proposition 3.2.6 (Caractérisations en dimension finie).

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i \text{ si et seulement si la concaténation des } \mathcal{B}_i \text{ est une base de } E.$$