

TD 1 - Compléments sur les espaces vectoriels

Exercice 1.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + 2y - z = 0\}$;
2. $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y + z = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$;
3. $C = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}$;
4. $D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ monotone}\}$;
5. $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$;
6. $F = \{P \in \mathbb{R}[x], \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } P(x) = ax(x-2) + bx^3 + c(x-3) + d\}$;
7. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[x], P(x+1) = 2P(x) \text{ et } P(3) = 0\}$;
8. $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+b+3x & 0 & a \\ 0 & a-b+4c & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$;
9. $I = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite réelle telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$;
10. $J = \{\text{suites réelles bornées}\}$;
11. $K = \{\text{matrices nilpotentes}\}$.

Exercice 2.

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}((2, 3, -1), (1, -1, -2))$ et $G = \text{Vect}((3, 7, 0), (5, 0, -7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 3.

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

- | | |
|---|---|
| $\mathcal{F}_1 = ((1, 2, 0), (-1, 5, 2))$; | $\mathcal{F}_4 = f_1 : x \mapsto x , f_2 : x \mapsto x-1 , f_3 : x \mapsto x+1 $; |
| $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 2))$; | $\mathcal{F}_5 = (3, x^2 + 1, x^5 - 3x^2 + 2)$; |
| $\mathcal{F}_3 = ((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, 1, 1))$; | $\mathcal{F}_6 = (x^k(x-1)^{n-k})_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ |

Exercice 4. *

On définit les fonctions f, g et h par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \sin(x^2) \text{ et } h(x) = \cos(x^3).$$

1. Donner les développements limités de f, g et h en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que la famille (f, g, h) est une famille libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels de l'exercice 1

Exercice 6.

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 2), x_2 = (-1, 2, -1), x_3 = (2, 3, 0), x_4 = (1, 0, -1), x_5 = (2, 1, -1)$;
2. $x_1 = (1, 1, 0, 1), x_2 = (1, -1, 1, 0), x_3 = (2, 0, 1, 1), x_4 = (0, -2, 1, -1)$;
3. $P_1 : x \mapsto x^2 + x - 3, P_2 : x \mapsto x^2 - x - 3, P_3 : x \mapsto 2x^2 - x - 6$.

Exercice 7.

Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Calculer les coordonnées de (a, b, c) dans cette base. En déduire $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. **

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\max_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathcal{C}(A))$ et $\min_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathcal{C}(A))$

Exercice 9.

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x], P(x) - (x+1)P'(x) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x], nP'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$, et en donner une base et la dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 10. *

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque ${}^tM = M$ et antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$. On note $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont en somme directe.
3. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. Conclure que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 11. **

Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 12. *

Soient $E_1, \dots, E_n$ et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $E_i \subset F_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et :

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Montrer que $E_i = F_i$.

Exercice 13. **

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[x] : \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[x]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $P = \lambda \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[x] = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

Exercice 14.

Soient F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E tel que

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\}, \quad F_2 \cap F_3 = \{0_E\} \text{ et } F_1 \cap F_3 = \{0_E\}.$$

A-t-on nécessairement $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

Exercice 15. *

Soient E un espace vectoriel, F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\begin{cases} F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \\ F' \text{ et } G' \text{ sont supplémentaires dans } E \\ F' \subset G. \end{cases}$$

Montrer que $F, F', G \cap G'$ sont en somme directe et : $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

Exercice 16.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. Pour tout entier naturel k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_k l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ qui s'annulent en k .

1. (a) Montrer que E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$.
 (b) Quelle est la dimension de E_k ?
 (a) Montrer que $\mathbb{R}_n[x] = E_1 + E_2 + \dots + E_n + \mathbb{R}_0[x]$
 (b) Etablir que $\mathbb{R}_0[x] \subset E_1 + E_2 + \dots + E_n$ et en déduire que $\mathbb{R}_n[x] = E_1 + E_2 + \dots + E_n$.
 (c) A-t-on $\mathbb{R}_n[x] = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$?
2. Montrer qu'on a, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{R}_n[x] = E_k \oplus \mathbb{R}_0[x]$.

Exercice 17.

Soit E un espace vectoriel, E_1, E_2 et E_3 sont trois sous-espaces de E . Montrer que $E_1 + E_2 + E_3$ est directe si et seulement si :

$$\begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ (E_1 + E_2) \cap E_3 = \{0\} \end{cases}$$