

Chapitre 2

Sommes, Séries

1 Sommes usuelles

1.1 Formule du binôme

1.1.1 Coefficients binomiaux

Définition 1.1.1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** n , et on note $n!$, l'entier défini par
$$n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^n k & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Remarque 1.1.1.

Si $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1)!$.

Définition 1.1.2.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0. \end{cases}$$

$\binom{n}{p}$ est le **coefficient binomial** et se lit " p parmi n ".

Rappel. L'entier $\binom{n}{p}$ correspond :

- au nombre de tirages de p éléments dans un ensemble à n éléments indiscernables au toucher
- au nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Proposition 1.1.1 (Relations sur les coefficients binomiaux).

Soit n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie des coefficients binomiaux).
2. Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.
3. Pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (Formule du triangle de Pascal).

Théorème 1.1.2 (Formule du binôme de Newton).

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.2 Autres sommes usuelles

1.3 Somme de constantes

Proposition 1.3.1.

$$\sum_{k=p}^n C = C(n-p+1)$$

1.4 Somme des entiers successifs

Proposition 1.4.1.

$$\sum_{k=p}^n k = \frac{(n+p)(n-p+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})(\text{nombre de termes})}{2}$$

1.4.1 Somme des premiers carrés

Proposition 1.4.2.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.4.2 Somme des premiers cubes

Proposition 1.4.3.

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

1.4.3 Sommes géométriques

Proposition 1.4.4.

$$\sum_{k=p}^n q^k = \begin{cases} (n-p+1) & \text{si } q = 1 \\ q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} & \text{sinon} \end{cases}$$

1.4.4 Autre

Proposition 1.4.5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b des réels. Alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right).$$

2 Sommes doubles

2.1 Sommes doubles indexées par un rectangle

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une famille de réels indexée par deux indices $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On souhaite calculer la somme de tous les réels de cette famille, on la note $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$.

Proposition 2.1.1 (Somme double indexée par un rectangle).

Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Corollaire 2.1.2 (Produit de deux sommes).

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq p}$ deux familles de nombres réels. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i b_j = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_i b_j.$$

2.2 Sommes doubles indexées par un triangle

On suppose à présent que les indices i et j sont liés de la manière suivante : $1 \leq i \leq j \leq n$, ou bien $1 \leq i < j \leq n$.

Proposition 2.2.1 (Somme double indexée par un triangle).

On dispose des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}. \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}. \end{aligned}$$

Exemple 2.2.1.

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

3 Séries

Dans cette section, $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels.

3.1 Généralités

Définition 3.1.1.

- On appelle **série de terme général** u_n , la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On la note $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelé la **somme partielle d'ordre n ou n -ème somme partielle**.
- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$, et on appelle alors **somme de la série** le réel $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$, qu'on note S ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Remarque 3.1.1.

- Attention aux notations !

$\sum_{k=0}^n u_k$	$\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$	$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
Somme partielle d'indice n	Série de terme général u_n : la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$	Somme de la série (si convergence) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$

- La **nature** d'une série (convergente ou divergente) ne dépend pas :
 - de l'indice de départ : étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq n_0} u_n$ converge.
 - des constantes multiplicatives : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

Définition 3.1.2.

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **reste partiel d'ordre n** le nombre : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarque 3.1.2.

Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0$.

Proposition 3.1.1 (Opérations sur les séries).

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

Remarque 3.1.3.

Attention, il est possible que la série $\sum u_n + v_n$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. Dans ce cas on ne pourra pas scinder la somme en deux !

Proposition 3.1.2 (Télescopage).

La série $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Proposition 3.1.3 (Condition nécessaire de convergence).

Pour que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, il faut que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

Mais ce n'est pas suffisant !!

ATTENTION il existe des séries dont le terme général tend vers 0 et divergentes : par exemple la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

Définition 3.1.3.

Par contraposition, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

3.2 Séries de référence

SÉRIES USUELLES		CAS DE CONVERGENCE	SOMME DANS CE CAS
SÉRIES DE RIEMANN	$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha > 1$	
SÉRIES GÉOMÉTRIQUES	$\sum_{k \geq 0} q^k, q \in \mathbb{R}$	$ q < 1$	$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
SÉRIES GÉOMÉTRIQUES DÉRIVÉES D'ORDRE 1	$\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$	$ q < 1$	$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
SÉRIES GÉOMÉTRIQUES DÉRIVÉES D'ORDRE 2	$\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$	$ q < 1$	$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$
SÉRIES EXPONENTIELLES	$\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}, x \in \mathbb{R}$	quelque soit $x \in \mathbb{R}$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Exemple 3.2.1.

Convergence et somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{3^n}$.

3.3 Séries à termes positifs

Proposition 3.3.1.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante, et :

- si (S_n) est majorée, $\sum u_n$ converge ;
- si (S_n) n'est pas majorée, $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration.

□

COMPARAISON PAR	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
<i>Équivalent</i>	• $u_k \sim_{+\infty} v_k$ • $v_k \geq 0$ (ou $u_k \geq 0$) à partir d'un certain rang • $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge (respectivement diverge)	$\sum_{k \geq 0} u_k$ converge (resp. diverge)
<i>Négligeabilité</i> « petit o »	• $u_k = o_{+\infty}(v_k)$ • $v_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge	$\sum_{k \geq 0} u_k$ converge
	• $u_k = o_{+\infty}(v_k)$ • $v_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge	$\sum_{k \geq 0} v_k$ diverge
<i>Inégalité</i>	• $u_k \leq v_k$ à partir d'un certain rang • $u_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum_{k \geq 0} v_k$ converge	$\sum_{k \geq 0} u_k$ converge
	• $u_k \leq v_k$ à partir d'un certain rang • $u_k \geq 0$ à partir d'un certain rang • $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge	$\sum_{k \geq 0} v_k$ diverge

Exemple 3.3.1.

Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{n}\right).$

2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}.$

3. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2}.$

3.4 Séries absolument convergentes

Définition 3.4.1.

On dit qu'une série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Remarque 3.4.1.

Grâce à cette notion, on se ramène à l'étude d'une série à termes positifs pour laquelle on peut appliquer tous les résultats de la sous-section précédente.

Exemple 3.4.1.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

Proposition 3.4.1 (Condition suffisante de convergence).

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge. Et dans ce cas :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \quad (\text{inégalité triangulaire généralisée}).$$

Exemple 3.4.2.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge donc.

ATTENTION, il existe des séries convergentes ($\sum u_n$ converge) qui ne sont pas absolument convergentes ($\sum |u_n|$ diverge).

Proposition 3.4.2 (Hors-Programme).

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série absolument convergente. Alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

On dit que (u_n) est une famille **sommable**.

Définition 3.4.2 (HP).

Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réel indexée par I .

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ telle que $\sum_{n \geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge absolument.

Proposition 3.4.3 (HP).

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ est indépendante de l'indexation φ .

On appelle ce réel la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ et on la note simplement $\sum_{i \in I} u_i$.

Remarque 3.4.2 (HP).

Pour des séries convergentes mais pas absolument convergentes, l'ordre de sommation peut influencer sur la nature de la série ou la valeur de la somme. Prenons par exemple $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Cette série est convergente mais pas absolument convergente. Et on peut montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$$

alors qu'en arrangeant les termes d'une autre façon, on obtient :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{2}.$$

On peut même trouver une numérotation φ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ diverge.

3.5 Plan d'étude d'une série**Méthode 3.1.**

Considérons une série $\sum u_n$ de terme général réel et de signe quelconque. Pour déterminer sa nature, on vérifie dans l'ordre :

1. si son terme général tend vers 0 : si ce n'est pas le cas, la série diverge grossièrement et l'étude s'arrête là, si c'est le cas on continue car cela ne suffit pas pour conclure ;
2. si son terme général est de signe constant à partir d'un certain rang :
 - on le précise dès le début de l'étude (ex : "c'est une série de terme général négatif (à partir du rang 5)");
 - on peut appliquer les critères de comparaison, d'équivalence, de négligeabilité pour se ramener à une série de référence (Riemann, géométrique, exponentielle).
3. si son terme général est de signe quelconque :
 - on étudie la convergence absolue de la série ;
 - si elle n'est pas absolument convergente, l'énoncé nous guidera sur une autre méthode.

Méthode 3.2.

La méthode précédente s'applique lorsque l'on demande uniquement la nature de la série, si la somme est également demandée dans la même question alors 3 possibilités sont présentes :

- on a une combinaison linéaire de séries exponentielles à faire apparaître (généralement lorsqu'il y a des $n!$ au dénominateur ;
- on a une combinaison de séries géométriques (classique, dérivée première, dérivée seconde) à faire apparaître (lorsqu'il y a des x^n mais pas de $n!$) ;
- on a une série télescopique soit apparente, soit à faire apparaître.

4 Séries doubles

On souhaite dans cette partie définir la somme $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}$ mais la question se pose de donner un sens

à cette somme. En effet avec deux indices que signifie cette somme ? A-t-on $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$? $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$?

Ces deux sommes sont-elles définies ? Sont-elles égales ? Les deux théorèmes suivants répondent en partie à cette question et nous suffiront pour l'utilisation que l'on aura.

Définition 4.0.1.

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombre indexée sur $\mathbb{N}^2$. On dit que la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est **sommable** si la somme de ces termes ne dépend pas de l'ordre de sommation. C'est à dire entre autres :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

Dans ce cas on note $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}$ cette somme.

Théorème 4.0.1 (Théorème de Fubini).

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels indexés par $\mathbb{N}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$ converge.
3. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{i \geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$ converge.

Et dans ce cas, on dit que la série double converge absolument et on a :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

Exemple 4.0.1.

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit $u_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} i^j}{i! j!}$. Montrer que la famille $(u_{i,j})$ est sommable et calculer sa somme.

Théorème 4.0.2 (Somme suivant les diagonales).

La famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i+j=n} |u_{i,j}| \right)$ converge.

Et dans ce cas :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} u_{i,j} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^n u_{i,n-i} \right).$$

Remarque 4.0.1.

- On remarque que dans ce cas on se ramène à l'étude d'une seule série : $\sum_{i+j=n} u_{i,j}$ est une somme finie.
- On pensera à utiliser la sommation suivant les diagonales quand le terme général $u_{i,j}$ fait intervenir la quantité $i+j$.

Exemple 4.0.2.

Posons $u_{i,j} = \frac{1}{(i+j)!}$, pour $(i,j) \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $(u_{i,j})$ est sommable, et calculer sa somme.