

TD 4 -Couples de Variables aléatoires discrètes

Exercice 1.

Soit n un entier naturel. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3) ;$
2. $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} ;$
3. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k ;$
4. $\prod_{k=1}^n (2k+1) ;$
5. $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$, on posera $i = 2n+1-k$.

Exercice 3.

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} ;$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!} ;$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} ;$
4. $\sum_{n \geq 1} n \frac{3^n}{4^{n+1}} ;$
5. $\sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}.$

Exercice 5.

Etudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n^2} ;$
2. $u_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1} ;$
3. $u_n = \frac{(1+n)\sin(n)}{n^2\sqrt{n}} ;$
4. $u_n = \cos(n) \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right).$

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

1. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 ;$
2. $\sum_{0 \leq i < j \leq n} ij ;$
3. $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j} ;$
4. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \frac{3^i 4^j}{5^{i+j}} ;$
5. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}.$

Exercice 4. *

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1} ;$
2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) ;$
3. $\sum \frac{n^2 \ln(n)}{e^n} ;$
4. $\sum \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{1000} ;$
5. $\sum_{n \geq 1} \left(\exp \left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right).$

Exercice 6. **

1. Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $U_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.
Montrer que la série de terme général U_n converge.
2. En déduire que la suite de terme général $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente.

Exercice 7. *

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite (u_n) .
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum (u_n - 1)$.

Exercice 8. **[QSP HEC 2014]

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 9. ***[Oral HEC 2021]

1. Soit x un réel. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge. On note $f(x)$ sa somme.
2. Soient x et y deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que : $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.
En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 1$ et que $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
4. Posons pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(f(t))^2}$. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis que $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 10. **[Oral HEC 2013]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{x^n}{n}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.
2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^x t^{k-1} dt$, et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

- (b) Montrer que si $x \in [-1, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

- (c) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

3. (a) Etablir la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

- (b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}.$$

- (c) L'application f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est-elle continue ?

Exercice 11. *[Etude de la série harmonique]

On considère dans cet exercice la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Divergence de la série harmonique.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la série harmonique diverge.

2. Equivalent de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$ par comparaison série/intégrale.

(a) Justifier l'inégalité suivante pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq H_n - \frac{1}{n}.$$

(c) Donner un équivalent de H_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Recherche d'un développement asymptotique de H_n .

Posons $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. En déduire que la série de terme général $(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ converge.

(b) Conclure que (γ_n) converge vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Le réel γ est appelé la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0,577$).

(c) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Exercice 12. *[Série harmonique alternée]

Considérons la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de ses sommes partielles.

1. Etude de la convergence.

(a) La série harmonique est-elle absolument convergente ?

(b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(c) En déduire que la série harmonique alternée converge. On notera $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ sa somme.

2. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.

(b) En déduire que $S_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$, et déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(c) Retrouver ce résultat en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique déterminé dans l'exercice 11.

Exercice 13. **[Critère spécial des séries alternées]

1. Soit (V_n) une suite positive et décroissante de limite nulle. Montrer que la série de terme général $U_n = (-1)^n V_n$ est convergente.
2. Application : On considère la suite de terme général $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$, $(n \in \mathbb{N})$. Montrer que cette série converge.

Exercice 14. *

Justifier que les sommes doubles suivantes sont convergentes et les calculer :

1. $\sum_{i,j \geq 0} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}$;
2. $\sum_{i,j \geq 0} \frac{(-1)^i j^i}{i!}$;
3. $\sum_{\substack{i \geq 2 \\ j \geq 2}} \frac{1}{ij}$;
4. $\sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 0}} \frac{i+j-1}{2^{i+j-2}}$;
5. $\sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 0}} \frac{(-1)^{i+j} 2^j}{i \times j!}$.