
Devoir maison 1 pour le 21/09/2026

Exercice 1 (Polynômes de Lagrange et matrice de Vandermonde).

Soient $a_0, \dots, a_n$, $n + 1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$L_i : x \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - a_k}{a_i - a_k} = \frac{x - a_0}{a_i - a_0} \times \dots \times \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \times \frac{x - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \times \dots \times \frac{x - a_n}{a_i - a_n}.$$

1. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, calculer $L_i(a_j)$ (on pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$).
2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de P .
4. Notons $\mathcal{C} = (1, x, \dots, x^n)$. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$. On pose :

$$F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\},$$

$$G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\},$$

$$H = \{P \in E, P(x) = P(-x)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.