
TD 6 - Applications

Notation :

La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel, c'est-à-dire l'entier le plus proche par valeur inférieure.

L'ensemble F^E désigne l'ensemble des applications de E dans F .

Exercice 1.

Soit f l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Déterminer l'intervalle image de $]1, +\infty[$ par f .

Exercice 2.

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et X et Y deux sous-ensembles de E . Montrer que si $X \subset Y$ alors $f(X) \subset f(Y)$

Exercice 3.

Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Exercice 4. Ecrire toutes les applications de $E = \{1, 2\}$ dans $F = \{a, b\}$ (avec $a \neq b$) et, pour chacune, indiquer si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 5.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $E_a = \{f \text{ application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, f(a) = 0\}$.

1. Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

(a) $\forall (f, g) \in E_0^2, g \circ f \in E_0$;

(b) $\forall f \in E_0, \forall n \in \mathbb{N} \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ compositions}} \in E_0$;

(c) $\forall f, g$ applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}, (g \circ f \in E_0 \Rightarrow f \in E_0 \text{ ou } g \in E_0)$;

(d) $\forall f, g$ applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}, (g \circ f \in E_a \iff g \in E_{f(a)})$.

2. Que dire de l'application f si

$$f \in \bigcap_{a \in \mathbb{R}} E_a ? \text{ si } f \in \bigcup_{a \in \mathbb{R}} E_a ?$$

Exercice 6.

Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f : E \rightarrow F$ dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

2. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

3. $E = \mathbb{N}, F = \mathbb{N}, f(n)$ est le reste de la division de n par 11.

4. $E = \mathbb{N}, F = [0, 11], f(n)$ est le reste de la division de n par 11.

5. $E = \mathbb{N}, F = [0, 10], f(n)$ est le reste de la division de n par 11.

6. $E = [1, 22], F = [0, 10], f(n)$ est le reste de la division de n par 11.

7. $E = [3, 14], F = [0, 10], f(n)$ est le reste de la division de n par 11.

Exercice 7.

Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 8.

Soient f et g définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \notin 2\mathbb{N} \end{cases}$$

Étudier les propriétés de f , de g , de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exercice 9.

Soient f et g définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + 1 \text{ et } g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Étudier les propriétés de f , de g , de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exercice 10.

Soit f l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = \frac{x+4}{x+3}$. Déterminer de quel intervalle I l'intervalle $]1, +\infty[$ est l'image par f .

Exercice 11.

Déterminer $f^{-1}(f([0, 1]))$ pour $f(x) = x^2 + 2x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Soit f l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n^2 + 1$. Montrer que f est injective, mais pas surjective.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = |x + 1|$. Montrer que f est surjective mais pas injective.

Exercice 15.

Soit F l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans lui-même définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$.

1. Déterminer le(s) couple(s) (x, y) tels que $f(x, y) = (0, 0)$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ? Sinon, calculer $f(\mathbb{R}^2)$.
4. Soient :

$$A = \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \text{ et } B = \{(0, b), b \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Déterminer les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) \in A$
- (b) Déterminer les $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) \in B$.

Exercice 16.

Soit $p : E \rightarrow E$ telle que $p \circ p = p$ (on dit que p est idempotente).

1. Démontrer que si p est injective, alors $p = \text{Id}_E$.
2. Démontrer que si p est surjective, alors $p = \text{Id}_E$.

Exercice 17.

Soient E et F deux ensembles non vides et $f \in F^E, g \in E^F$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective et que si de plus f est surjective, alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective et que si de plus g est injective, alors f est surjective.

Exercice 18.

Soit f, g et h des applications de E dans lui-même. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que les applications f, g et h sont bijectives.

Exercice 19.

Soient $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ trois applications. Démontrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g, h le sont.

Exercice 20.

Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 21.

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $T_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $f \in E$ associe l'application $T_a(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_a(f)(x) = f(x + a)$.

Démontrer que T_a est une bijection, de bijection réciproque T_{-a} .

Exercice 22.

Soit f l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Déterminer $f \circ f$ et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Exercice 23.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

1. Prouver que si f est paire alors elle n'est pas bijective. Et si f est supposée seulement périodique ?
2. On suppose que f est impaire et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que f^{-1} est impaire.

Exercice 24.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 25.

Montrer que la fonction $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$ et déterminer f^{-1} .