
Devoir surveillé 1 du 18/09/2026 - Type EDHEC
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 4 pages

Exercice 1 : EDHEC 2017

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

1. (a) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de **f(x,n)**, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
1 def f(x,n):  
2     S=....  
3     for k in range(...):  
4         S=.....  
5     return S
```

- (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer **f**, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée **f**.

```
1 def f(x,n):  
2     if x==1:  
3         return ....  
4     else :  
5         return ....
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.
(b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
1 n=input('entrer la valeur de n :')  
2 x=0  
3 while f(x,n)<1:  
4     x=x+0.001  
5 print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Exercice 2

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et la relation, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Ecrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
On admet dans la suite que le polynôme $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ est annulateur de la matrice A (pn ne demande pas de le vérifier)
2. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :

$$x^n = PQ_n + R_n.$$

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

- (c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.
3. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I , $A - I$ et $(A - I)^2$.
 4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n .
 5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 - (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

On définit alors la fonction génératrice G_X de X par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k.$$

1. (a) Préciser $G_X(1)$.
(b) Justifier que $E(X) = G'_X(1)$.
(c) Trouver une relation simple entre $V(X)$, $G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $E(t^X) = G_X(t)$.
3. *Une application.*
un basketteur a n paniers à trois points à mettre. Il s'arrête au premier échec. On suppose que s'il se présente au i -ème lancer, la probabilité de réussir le panier est $q_i \in]0, 1[$. Soit X_n la variable aléatoire qui renvoie le nombre de paniers réussis.
(a) Donner la loi de X_n en fonction des nombres q_i .
(b) On se place dans le cas où pour tout indice i , $q_i = q$. On pose $p = 1 - q$. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1/q\}$

$$G_{X_n}(t) = p \frac{1 - (qt)^n}{1 - qt} + (qt)^n.$$

- (c) En déduire que $E(X_n) = \frac{q}{p}(1 - q^n)$. Préciser la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

1 Problème : EDHEC 2024

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
(b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a l'inégalité : $e^{x/2} \leq 1 + x$.
(b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$$

- (c) Pour les cubes : Justifier que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.
- (d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie 2

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

- (b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
5. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$$

- (b) Déterminer J_1 .

- (c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.

- (d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n .

```
1 def suiteJ(n):  
2     J=.....  
3     for k in range(2,n+1):  
4         J=.....  
5     return J
```

6. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de « piles » (resp. « faces ») obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. (a) Donner, en justifiant, la loi de X_n .
(b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n)$.
(c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.
(d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de « piles » que de « faces » lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
8. Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k^e lancer et 0 sinon.

- (a) Vérifier que l'on a $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

Pour les cubes

En appliquant le théorème limite central à la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}$$

- (b) Retrouver le résultat établi à la question 7d).

Devoir surveillé 1 du 18/09/2026 - Type ECRICOME
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 6 pages

Exercice 1 : Ecricome 2019

On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

2. (a) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge.

- (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+1})$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

- (d) Compléter la fonction I suivante, qui prend en entrée un entier positif n , afin qu'elle retourne un vecteur u qui contient les $2n+2$ premiers termes de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

```

1 def I(n):
2     u=np.zeros(...)
3     u[0]=...
4     u[1]=...
5     for k in range(1,n+1) :
6         .....
7         .....
8     return u

```

3. (a) Rappeler un équivalent simple de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $u \mapsto \ln(1+u)$ au voisinage de 0.

- (b) Montrer que $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n$.

- (c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = 1$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}$$

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n^{-1/4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} \left(\cos(n^{-1/4}) \right)^n$$

- (c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n$$

En déduire la nature de la série de terme général I_n .

- (b) Ecrire une fonction en **Python** qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie en sortie le terme de rang n de la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n \geq 0} I_n$
6. (a) Montrer que pour tout réel t de $]-\pi, \pi[$: $\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \left(\frac{t}{2} \right)}$
- (b) À l'aide du changement de variable $u = \tan \left(\frac{t}{2} \right)$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1$$

- (c) Montrer que pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt$$

- (d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}$$

- (e) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k I_k$ est convergente et déterminer sa somme.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie non nulle et f un endomorphisme non nul de E . On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k termes f) et $f^0 = Id_E$.

- On dit que f est nilpotent s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- On dit que f est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si l'on a $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{m-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que si f est nilpotent, alors f n'est pas bijectif.
2. Un premier exemple : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ de matrice A dans la bases canonique (e_1, e_2) .

- (a) Vérifier que f est nilpotent et préciser son indice.
 - (b) Justifier que $\text{Im}(f) = \ker(f)$ et en préciser une base.
3. Un deuxième exemple : E est de dimension 2 et muni d'une base $\mathcal{C}$.

Soit f un endomorphisme non nul de E de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$. On suppose que f est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$

- (a) Justifier que $ad - bc = 0$ et calculer $A^2 - (a + d)A$.
- (b) En déduire que $m = 2$.
- (c) Justifier que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ et établir que $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\ker(f) = \text{Im}(f)$.
- (d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}'$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On suppose ici que f est non nul et que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$. Justifier que f est nilpotent d'indice 2.
5. Un dernier exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[x]$ et f l'application définie sur E par $f(P) = P'$.
 - (a) Justifier que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice $n + 1$.
 - (b) Préciser la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$. Justifier que $I - A$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^n A^k$.
 - (c) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
 - (d) Soit $\mathcal{D} = (x^n, f(x^n), \dots, f^k(x^n), \dots, f^n(x^n))$. Vérifier que $\mathcal{D}$ est une base de E .
Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{D}$.
Ecrire un programme **Python** demandant n à l'utilisateur, calculant et affichant B .
 - (e) On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$ tel que $g^2 = f$.
En remarquant que $g \circ f = f \circ g$, prouver que le plan $F = \text{Vect}(1, x)$ est stable par g .
En notant h l'endomorphisme induit par g sur F . Justifier que h est nilpotent d'indice 2.
Que peut-on en conclure ?

Problème : Ecrimage 2019

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k + 1)$ -ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k , X_k est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1 . Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k .
4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).
5. Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \quad (*)$$

6. À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3 .

7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$

- (b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}([X_k = k+1])$

- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$

Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k .

Montrer que la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.

En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

Partie B

8. Que renvoie la fonction Python suivante pour un entier k non nul ?
Détaillez le fonctionnement de la ligne 5.

```
1 def mystere(k):
2     n=1
3     b=1
4     for i in range(1,k+1):
5         r=np.floor(rd.random()*(n+b)+1)
6         if r>n :
7             n=n+1
8         else :
9             b=b+1
10    return b
```

9. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def loi_exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N , qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de X_k (c'est-à-dire que pour chaque $i \in [[1, k+1]]$, `LE(i)` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations).

On pourra utiliser la fonction `mystere`.

10. Recopier et compléter la fonction `loi_theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n , afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de X_n .

```
1 def loi_theo(n):
2     M=np.zeros(n+1,n+2)
3     M(1,1)=1/2
4     M(1,2)=1/2
5     for k in range(1,n):
6         M(k+1,1)=...
7         for i in range(1,k+1):
8             M(k+1,i)=...
9         M(k+1,k+2)=.....
10    LT=.....
```

11. Un étudiant nous propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

Partie C

12. (a) À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1$$

- (b) Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_k) = \frac{k+2}{2}$$

- (c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.
Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.
On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, V(X_k) = \frac{k+2}{12}$$

13. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1$$

- (b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

Partie D

14. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par .

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & jP(X+1) - iP(X) \end{array}$$

- (a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.
(b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$
(c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.
(d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.
(Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ où n est le degré de P).

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq i$, en posant

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leq j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}((3+X-i)P_{i-1,j}(X))$$

et enfin pour tout entier $i > 1$.

$$P_{i,i}(X) = - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)$$

15. (a) Vérifier que : $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$
(b) Vérifier que : $P_{3,2}(X) = -2X - 4$
On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.
16. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante .

$$\mathcal{H}_i : \ll \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k) j^k \gg$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$, est vraie.

- (a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est, vraie.
(b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)! \mathbb{P}([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k$$

En utilisant la formule (*) et la relation $(3+X-i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))$ montrer que la suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est géométrique.

Déterminer α_0 et en déduire $\mathcal{H}_i$ que est vraie.

- (c) Conclure.
17. (a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le. résultat de la question 7(c).
- (b) Déterminer $\mathbb{P}([X_k = 3])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.