
Devoir surveillé 1 du 18/09/2026 - Type ECRICOME
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 6 pages

Exercice 1. [Ecricome 2019, ex1]

On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction polynomiale $u \mapsto u^n$ donc par composition la fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on peut l'intégrer sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ et I_n est bien définie.

$$\text{On a } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Pour la suite on utilise la relation $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ vraie pour tout a, b dans $\mathbb{R}$. On a en particulier $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = \cos(a)^2 + \cos(a)^2 - 1 = 2\cos(a)^2 - 1$.
Donc $\cos(a)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1)$.

$$\text{Par conséquent } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2. (a) Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge.

On calcule le signe de

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 1) (\cos t)^n dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$ donc $(\cos t - 1) (\cos t)^n \leq 0$. En intégrant selon t sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec $0 \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

Donc la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos(t)$, en intégrant selon t sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec $0 \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$0 \leq I_n.$$

Donc la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc elle converge.

- (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+1})$

On remarque $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos(t) dt$.

On pose $u'(t) = \cos(t)$ et $u(t) = \sin(t)$ puis $v(t) = (\cos t)^{n+1}$, $v'(t) = (n+1)(-\sin(t))(\cos t)^n$, les fonctions u, v sont C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\sin(t)(\cos t)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(t))(\cos t)^n \sin(t) dt = 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 (\cos t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2) (\cos t)^n dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

Bilan : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Ce qui précède assure que $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

On pose alors $\mathcal{H}_n : \left(I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \right)$.

Avec $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on voit que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie, on a alors

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} &= I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \\ &\stackrel{\mathcal{H}_n}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \underbrace{\frac{2n+2}{2(n+1)}}_{=1} \times \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)+1} &= I_{2n+1+2} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} \\ &\stackrel{\mathcal{H}_n}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \underbrace{\frac{2n+2}{2(n+1)}}_{=1} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

- (d) Compléter la fonction I suivante, qui prend en entrée un entier positif n , afin qu'elle retourne un vecteur u qui contient les $2n + 2$ premiers termes de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

```

1 def I(n):
2     u=np.zeros(2*n+2)
3     u[0]=np.pi/2
4     u[1]=1
5     for k in range(1,n+1) :
6         u[2*k]=(2*k-1)/(2*k)*u[2*k-2]
7         u[2*k+1]=(2*k)/(2*k+1)*u[2*k-1]
8     return u

```

3. (a) Rappeler un équivalent simple de $x \mapsto \cos(x) - 1$ et $u \mapsto \ln(1 + u)$ au voisinage de 0.

Le cours dit que $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$.

- (b) Montrer que $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-1/4}))^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < n^{-1/4} \leq 1$ donc $0 < \cos(n^{-1/4}) < 1$ et on peut composer par $\ln$. Ainsi $n \ln(\cos(n^{-1/4})) = n \ln\left(1 + \cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1\right)$ or $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow{+\infty} 0$ donc

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{1/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{+\infty} 0$$

donc $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \underset{+\infty}{\sim} n \times \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2\sqrt{n}} = -\frac{\sqrt{n}}{2}$.

On en déduit que $n \ln(\cos(n^{-1/4})) \xrightarrow{+\infty} -\infty$, en composant cette limite par exponentielle, il vient

$$\exp\left(n \ln\left(\cos(n^{-1/4})\right)\right) = \left(\cos(n^{-1/4})\right)^n \xrightarrow{+\infty} 0.$$

- (c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-2/3}))^n = 1$.

Avec un raisonnement analogue,

$$\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{4/3}} \xrightarrow{+\infty} 0$$

donc $n \ln(\cos(n^{-2/3})) \underset{+\infty}{\sim} n \times \left(\cos\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n^{4/3}} = -\frac{1}{2n^{1/3}}$.

On en déduit que $n \ln(\cos(n^{-2/3})) \xrightarrow{+\infty} 0$, en composant cette limite par exponentielle, il vient

$$\exp\left(n \ln\left(\cos(n^{-2/3})\right)\right) = \left(\cos(n^{-2/3})\right)^n \xrightarrow{+\infty} 1.$$

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq n^{-1/4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0; n^{-1/4}]$, $(\cos t)^n$ est dominé par 1 donc en intégrant avec $0 < n^{-1/4}$, on a

$$\int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt \leq \int_0^{n^{-1/4}} 1 dt = n^{-1/4}.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \frac{\pi}{2} \left(\cos \left(n^{-1/4} \right) \right)^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[n^{-1/4}; \frac{\pi}{2}]$, $t \mapsto (\cos t)^n$ est décroissante donc dominée par $(\cos(n^{-1/4}))^n$ donc en intégrant avec $n^{-1/4} < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} \left(\cos(n^{-1/4}) \right)^n dt = \left(\cos(n^{-1/4}) \right)^n \times \left(\frac{\pi}{2} - n^{-1/4} \right) \leq \frac{\pi}{2} \left(\cos(n^{-1/4}) \right)^n.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

On utilise la relation de Chasles, les questions 3(b), 4(a), 4(b) et le fait que I_n est positive,

$$0 \leq I_n = \int_0^{n^{-1/4}} (\cos t)^n dt + \int_{n^{-1/4}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \leq \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{\pi}{2} \left(\cos(n^{-1/4}) \right)^n \xrightarrow{+\infty} 0.$$

Donc par encadrement $I_n \xrightarrow{+\infty} 0$.

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq n^{-2/3} \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n$$

En déduire la nature de la série de terme général I_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la relation de Chasles

$$I_n = \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt + \int_{n^{-2/3}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

Sur $[n^{-2/3}, \pi/2]$, cosinus est positif donc, avec des bornes dans l'ordre croissant, on a $\int_{n^{-2/3}}^{\pi/2} (\cos t)^n dt \geq 0$.

Donc $I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt$, on utilise une fois de plus le fait que $t \mapsto (\cos t)^n$ est décroissante sur $[0; n^{-2/3}]$ pour minorer,

$$I_n \geq \int_0^{n^{-2/3}} (\cos t)^n dt \geq \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n \int_0^{n^{-2/3}} 1 dt = \left(\cos \left(n^{-2/3} \right) \right)^n n^{-2/3}.$$

A la question 3(c), il est vu que $(\cos(n^{-2/3}))^n \xrightarrow{+\infty} 1$ donc $(\cos(n^{-2/3}))^n n^{-2/3} \sim n^{-2/3} = \frac{1}{n^{2/3}}$.

Or $\frac{2}{3} < 1$ donc la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge donc par comparaison des séries à terme général positif, la série $\sum_{n \geq 1} (\cos(n^{-2/3}))^n n^{-2/3}$ diverge et par comparaison la série

$$\sum_{n \geq 1} I_n \text{ diverge.}$$

(b) Ecrire une fonction en **Python** qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie en sortie le terme de rang n de la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n \geq 0} I_n$

```

1 def somme(n):
2     S=0
3     u=I(n)
4     for k in range (n+1):
5         S=S+u[k]
6     return S

```

6. (a) Montrer que pour tout réel t de $]-\pi, \pi[$: $\cos(t) + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(\frac{t}{2})}$

$$\text{Soit } t \in]-\pi, \pi[, \frac{2}{1 + \tan^2(\frac{t}{2})} = \frac{2}{1 + \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2})}} = \frac{2\cos^2(\frac{t}{2})}{\cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})} = 2\cos^2(\frac{t}{2}) = \cos(t) + 1.$$

(b) À l'aide du changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} = 1$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1 + \cos(t)}$ est continue sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$ est bien définie. On applique le changement de variables $u = \tan(\frac{t}{2})$ de classe C^1 avec $du = \frac{1}{2} (1 + \tan^2(\frac{t}{2})) dt = \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$. Avec $t = 0, u = 0$ et avec $t = \frac{\pi}{2}, u = 1$, donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt = \int_0^1 1 du = 1.$$

(c) Montrer que pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on utilise la linéarité de l'intégration,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^n \int_0^{\pi/2} (-1)^k (\cos(t))^k dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^n (-\cos(t))^k dt.$$

Or sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $-\cos(t) \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^n (-\cos(t))^k = \frac{1 - (-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)}$. De plus la fonction $t \mapsto \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)}$ est continue sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$, donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt$$

(d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}$$

On utilise la positivité de l'intégration avec le fait que $0 < \frac{\pi}{2}$,

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \left| \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} \right| dt = \int_0^{\pi/2} \frac{|\cos(t)|^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt.$$

On a $|\cos(t)|^{n+1} = \cos(t)^{n+1}$ car $\cos$ est positif sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. On a aussi avec cet argument que, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\frac{1}{1+\cos t} \leq 1$ donc en multipliant par $\cos(t)^{n+1}$ positif on a $\frac{\cos(t)^{n+1}}{1+\cos(t)} \leq \cos(t)^{n+1}$, puis en intégrant toujours avec des bornes dans l'ordre croissant, il vient

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{n+1} dt = I_{n+1}.$$

(e) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k I_k$ est convergente et déterminer sa somme.

On en déduit avec 6(c) puis 6(b) que

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)} dt \right| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)} dt \right| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k - 1 \right| \leq I_{n+1}.$$

Or la suite (I_k) converge vers 0 selon 4(c), donc par encadrement

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k I_k$ converge et sa somme vaut 1.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie non nulle et f un endomorphisme non nul de E . On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k termes f) et $f^0 = Id_E$.

- On dit que f est nilpotent s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- On dit que f est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si l'on a $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{m-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que si f est nilpotent, alors f n'est pas bijectif.

Soit f un endomorphisme nilpotent, et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0$. Supposons par l'absurde que f est bijectif. Alors par composition $f^m = f \circ f \circ \dots \circ f$ est bijectif. Ce qui est absurde puisque $f^m = 0$.

Donc si f est nilpotent, alors f n'est pas bijectif.

2. Un premier exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A .

(a) Vérifier que f est nilpotent et préciser son indice.

$A \neq 0$ et $A^2 = 0$ donc, donc $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Ainsi f est nilpotent d'indice 2.

(b) Justifier que $\text{Im}(f) = \ker(f)$ et en préciser une base.

- $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}((1, 1), (-1, -1)) = \text{Vect}((1, 1))$ car $(-1, -1) = -(1, 1)$.
- $u = (x, y) \in \ker(f) \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow u = (x, x)$. Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, 1))$.

Ainsi, $\text{Im}(f) = \ker(f)$ et cet espace a pour base $((1, 1))$ (cette famille est bien libre car composée d'un seul vecteur non nul).

3. Un deuxième exemple : E est de dimension 2 et muni d'une base $\mathcal{C}$.

Soit f un endomorphisme non nul de E de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$. On suppose que f est nilpotent d'indice $m \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Justifier que $ad - bc = 0$ et calculer $A^2 - (a + d)A$.

Comme f est nilpotent, d'après le 1. f n'est pas bijectif. Donc sa matrice A n'est pas inversible, elle a donc un déterminant nul. Soit :

$$\det(A) = ad - bc = 0.$$

De plus,

$$A^2 - (a + d)A = \dots = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

- (b) En déduire que $m = 2$.

Comme f est non nul, A est non nulle.

Supposons $a + d \neq 0$, alors $A^2 = (a + d)A \neq 0$. Puis $A^3 = (a + d)A^2 = (a + d)^2 A \neq 0$, etc... (par récurrence on peut montrer que $A^k = (a + d)^{k-1} A$ pour tout $k \geq 1$). Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \neq 0$, ce qui est absurde puisque l'on suppose f et donc A nilpotent.

Ainsi $a + d = 0$ et $A^2 = 0$.

On en déduit bien que $m = 2$.

- (c) Justifier que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ et établir que $\text{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\ker(f) = \text{Im}(f)$.

Comme $A^2 = 0$, on a $f^2 = 0$, et donc pour tout $y \in \text{Im}(f)$, $y = f(x)$, on a $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$. Ainsi $y \in \ker(f)$. Donc $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

De plus, comme $f \neq 0$, $\ker(f) \neq \mathbb{R}^2$, donc $\dim(\ker(f)) \leq 1$. On a donc :

$$\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\ker(f)) \leq 1$$

Or, par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = 2$. Ainsi la seule solution est $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) = 1$. f est donc bien de rang 1.

Comme $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f))$, nécessairement, $\text{Im}(f) = \ker(f)$.

- (d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}'$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche deux vecteurs $u, v \in E$ qui forment une base de E tels que $f(u) = 0$ et $f(v) = u$. Pour avoir une famille libre il faut nécessairement que $u, v \neq 0$. En particulier on cherche un vecteur v tel que $f(v) \neq 0$. Comme $f \neq 0$, $\ker(f) \neq E$. On peut donc prendre $v \in E \setminus \ker(f)$. Posons alors $u = f(v)$ et montrons que

- $f(u) = 0$
- (u, v) forme une base de E .

En effet :

- Tout d'abord $f(u) = f(f(v)) = f^2(v) = 0$ par la question 3.b. Donc $f(u) = 0$
- Par ailleurs montrons que (u, v) forme une famille libre.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0(*)$ alors en appliquant f :

$$\lambda f(u) + \mu f(v) = 0 \Rightarrow \mu f(v) = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Donc nécessairement $\mu = 0$ et en injectant dans $(*)$ on obtient $\lambda = 0$.

La famille (u, v) est donc libre, elle est composée de deux vecteurs et l'espace E est de dimension 2. C'est donc une base de E .

Alors si on note $\mathcal{C}' = (u, v)$, on obtient

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On suppose ici que f est non nul et que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$. Justifier que f est nilpotent d'indice 2.

Si $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, alors pour tout $u \in E$, $f^2(u) = f(f(u)) = 0$ car $f(u) \in \text{Im}(f) \subset \ker(f)$. Donc $f^2 = 0$. Et comme $f \neq 0$, f est nilpotente d'ordre 2.

5. Un dernier exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[x]$ et f l'application définie sur E par $f(P) = P'$.

- (a) Justifier que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice $n+1$.

La dérivation est une application linéaire. De plus si $\deg(P) \leq n$, alors $\deg(P') \leq n-1 \leq n$, donc $f(E) \subset E$: f est un endomorphisme de E .

Par ailleurs, si $\deg(P) = k \in \mathbb{N}$ alors $\deg(f(P)) \leq k-1$. Ainsi si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors $\deg(f^{n+1}(P)) = \deg(P^{(n)}) \leq \deg(P) - (n+1) \leq n - (n+1) = -1$. Donc $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

De plus si $P = x^n$ alors $f^n(P) = n! \neq 0$ donc $f^n \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On en déduit que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice $n+1$.

- (b) Préciser la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$. Justifier que $I - A$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^n A^k$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(x^k) = kx^{k-1}$ et $f(1) = 0$. Ainsi, on obtient :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & k-1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

* Et donc :

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -(k-1) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $I - A$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, cette matrice est donc inversible.

Par ailleurs :

$$(I - A) \sum_{k=0}^n A^k = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = I - A^{n+1}$$

par télescopage. Or comme $f^{n+1} = 0$, en passant aux matrices $A^{n+1} = 0$.

Ainsi $(I - A) \sum_{k=0}^n A^k = I$ et donc $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^n A^k$.

- (c) Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Soit $P \in E$.

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P \text{ est constant}$$

Donc $\ker(f) = \mathbb{R}_0[x]$.

Par ailleurs,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(x), \dots, f(x^n)) = \text{Vect}(0, 1, 2x, 3x^2, \dots, nx^{n-1})$$

donc

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

- (d) Soit $\mathcal{D} = (x^n, f(x^n), \dots, f^k(x^n), \dots, f^n(x^n))$. Vérifier que $\mathcal{D}$ est une base de E .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(f^k(x^n)) = n - k$. La famille $\mathcal{D}$ est donc formée de $(n+1)$ polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, c'est donc une base de E .

Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{D}$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f(f^k(x^n)) = f^{k+1}(x^n)$ et $f(f^n(x^n)) = 0$, donc :

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire un programme Python demandant n à l'utilisateur, calculant et affichant B .

```
1 import numpy as np
2 B=np.zeros([n,n])
3 for k in range(1,n):
4     B[k,k-1]=1
5 print(B)
```

- (e) On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$ tel que $g^2 = f$.
En remarquant que $g \circ f = f \circ g$, prouver que le plan $F = \text{Vect}(1, x)$ est stable par g .

On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$ tel que $g^2 = f$.

On a alors

$$g \circ f = g \circ g^2 = g^3 = g^2 \circ g = f \circ g.$$

Soit $F \in F = \text{Vect}(1, x)$. Alors

$$f^2 \circ g(P) = g \circ f^2(P) = g(P'') = g(0) = 0$$

car g est linéaire. Donc $f^2 \circ g(P) = (g(P))'' = 0$, $g(P)$ est donc un polynôme dont la dérivée seconde s'annule, donc $g(P) \in \text{Vect}(1, x)$. Par conséquent le plan F est stable par g .

En notant h l'endomorphisme induit par g sur F . Justifier que h est nilpotent d'indice 2. Que peut-on en conclure ?

Soit h l'endomorphisme induit par g sur F . Alors h est nilpotent puisque pour tout $P \in F$, $h^4(P) = g^4(P) = f^2(P) = P'' = 0$. Or d'après la question 2. tout endomorphisme nilpotent non nul d'un espace vectoriel de dimension 2 a pour indice 2. Donc h est nilpotent d'indice 2. Soit $h^2 = 0$, donc pour tout $P \in F$, $f(P) = g^2(P) = h^2(P) = 0$, ce qui est absurde puisque par exemple $f(x) = 1 \neq 0$.

Il n'existe donc pas d'application $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$ telle que $g^2 = f$.

Problème 1 (Ecrisome 2019).

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$ -ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k , X_k est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1 . Donner son espérance et sa variance.

Avant le 2e tirage c'est-à-dire après le premier, il y a soit 2 blanches (B) et une noire (N) si on a pioché N au premier tour. Si on pioche B au premier tour, on aura 2 N et une B.

Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. On a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$. On reconnaît une loi uniforme sur $\llbracket 1, 2 \rrbracket$. Ainsi $E(X_1) = \frac{3}{2}$ et $V(X_1) = \frac{4-1}{12} = \frac{1}{4}$.

2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

Lors de deux tirages, on peut extraire 2 N ou 2 B ou bien 1 N et 1 B donc X_2 peut valoir 3 ou 2 ou 1 donc $X_2(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$. $[X_2 = 1]$ est réalisé si et seulement si $B_1 \cap B_2$ est réalisé donc

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

car sachant B_1 , le deuxième tirage se fait dans une urne avec 1 B et 2 N.

De même $[X_2 = 3]$ est réalisé si et seulement si $N_1 \cap N_2$ est réalisé donc

$$\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

car sachant N_1 , le deuxième tirage se fait dans une urne avec 1 N et 2 B.

Donc $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1]) - \mathbb{P}([X_2 = 3]) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k .

Sachant qu'il y a une blanche et une noire au début, lors de k tirages on peut extraire entre 0 et k blanches donc après ceux-ci, l'urne peut contenir entre 1 blanche et $k+1$ blanches donc

$$X_k(\Omega) = \llbracket 1, k+1 \rrbracket.$$

4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$

(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).

Soit $i \in \mathbb{N}^*, j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$. Il est immédiat qu'après le k^e tirage, il y a $k+1$ boules dans l'urne car une ajoute une boule à chaque tirage. Donc après le $(k+1)^e$ tirage, il y a $k+2$ boules dans l'urne. Le tirage $k+1$ amène une B ou une N donc à son issue, le nombre de B est stable ou est augmenté de 1. Donc si $i \neq j$ et $i \neq j+1$ alors $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) = 0$.

Selon le protocole, le nombre de B est stable après un tirage si et seulement si on sort une B donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j])$ est la probabilité de sortir une B dans une urne contenant j B et $k+2$ boules donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j]) = \frac{j}{k+2}$.

Selon le protocole, le nombre de B est augmenté de 1 après un tirage si et seulement si on sort une N donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j+1])$ est la probabilité de sortir une N dans une urne contenant j B et $k+2$ boules donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j+1]) = \frac{k+2-j}{k+2}$.

5. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \quad (*)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, si $i \notin \llbracket 1, k+2 \rrbracket = X_{k+1}(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = 0$ et comme $i-1 \notin \llbracket 1, k+1 \rrbracket = X_k(\Omega)$, on a aussi $\mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ donc la formule (*) est vraie.

Supposons $i = k+2$, alors $[X_{k+1} = k+2]$ est réalisé si et seulement si $[X_k = k+1] \cap N_{k+1}$ est réalisé car le nombre maximal de B après k tirages est $k+1$. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \mathbb{P}(X_k = k+1)P_{[X_k=k+1]}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(X_k = k+1) \times \frac{1}{k+2}$. Or $k+2 \notin X_k(\Omega)$ donc $\mathbb{P}(X_k = k+2) = 0$ donc la formule

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \quad (*)$$

est vraie pour $i = k+2$.

Supposons $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d  v  nements $\{[X_k = j]\}_{1 \leq j \leq k+1}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = j) \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)$$

or $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0$ si $i \neq j$ et $i \neq j+1$ donc il reste deux termes dans la somme

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \mathbb{P}(X_k = i) \mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) + \mathbb{P}(X_k = i-1) \mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i).$$

On a vu que $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}$.

Si $i = 1$, alors $\mathbb{P}(X_k = i-1) = \mathbb{P}(X_k = 0) = 0$ et la formule (*) est valable pour $i = 1$, sinon la question précédente avec $j = i-1$ donne $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{k+3-i}{k+2}$.

Finalement on a bien dans tous les cas

$$\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} P([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} P([X_k = i-1]) \quad (*).$$

6.    l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3 .

On a $X_3(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, et $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{24}$, $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{24}$ puis

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{4} \mathbb{P}(X_2 = 2) + \frac{3}{4} \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$$

et $\mathbb{P}(X_3 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 2) - \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{11}{24}$.

7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{(k+1)!}$

On reprend la question 5 avec $i = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$ ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = 1)$. Avec $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, une récurrence simple donne $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

(b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}([X_k = k+1])$

On reprend la question 5 avec $i = k+2$ et $\mathbb{P}(X_k = k+2) = 0$ ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \frac{3+k-(k+2)}{k+2} \mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{k+2} \mathbb{P}(X_k = k+1)$. Avec $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, une récurrence simple donne $\mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2])$

Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k .

Montrer que la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = a_k + k + 2$ est géométrique.

En déduire alors que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

• Soit $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = (k+2)! \mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = (k+2)! \left(\frac{2}{k+2} \mathbb{P}([X_k = 2]) + \frac{3+k-2}{k+2} \mathbb{P}([X_k = 1]) \right)$

donc $a_{k+1} = (k+2)! \left(\frac{2}{k+2} \frac{a_k}{(k+1)!} + \frac{3+k-2}{k+2} \frac{1}{(k+1)!} \right) = 2a_k + k + 1$.

• $b_{k+1} = a_{k+1} + k + 1 + 2 = 2a_k + k + 1 + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k$.

• La suite (b_j) est géométrique de raison 2 donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = 2^k b_0 = 2^k (a_0 + 2) = 2^{k+1}$ car $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 0$. Donc $a_k = 2^{k+1} - k - 2$ et $\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$.

Partie B

8. Que renvoie la fonction Python suivante pour un entier k non nul ?

Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```

1 def mystere(k):
2     n=1
3     b=1
4     for i in range(1,k+1):
5         r=np.floor(rd.random()*(n+b)+1)
6         if r>n :
7             n=n+1
8         else :
9             b=b+1
10    return b

```

La ligne 5 simule une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+b \rrbracket$. En effet $\text{rd.random}()$ simule une loi uniforme sur $]0, 1[$ donc $\text{rand}()*(n+b)$ simule une loi uniforme sur $]0, n+b[$ donc $1+ \text{rand}()*(n+b)$ simule une loi uniforme sur $]1, 1+n+b[$ en prenant la partie entière $\text{floor}(1+ \text{rand}()*(n+b))$ simule une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+b \rrbracket$.

Donc r est un nombre entier choisi au hasard dans $\llbracket 1, n+b \rrbracket$, on peut considérer que les boules N ont les numéros 1 à n et que les blanches ont les numéros $n+1$ à $n+b$. Ainsi n est le nombre de N et b le nombre de B. Donc si $r > n$, on a sorti une B et n est augmenté de 1 sinon on a sorti une N et b augmenté de 1.

n et b sont initialisés à 1 ensuite on simule k tirages et on retourne b le nombre de B à la fin des ces tirages. On a donc simulé X_k .

9. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def loi_exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N , qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur LE qui contient une estimation de la loi de X_k (c'est-à-dire que pour chaque $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, $\text{LE}(i)$ contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations).

On pourra utiliser la fonction `mystere`.

```

1 def loi_exp(k,N):
2     LE=np.zeros(k+1)
3     for j in range(N):
4         valeur=mystere(k)
5         LE(valeur)=LE(valeur)+1
6     LE=LE/N
7     return LE

```

10. Recopier et compléter la fonction `loi_theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n , afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de X_n .

```

1 def loi_theo(n):
2     M=np.zeros(n+1,n+2)
3     M(1,1)=1/2
4     M(1,2)=1/2
5     for k in range(1,n):
6         M(k+1,1)=M(k,1)/(k+2)
7         for i in range(1,k+1):
8             M(k+1,i)=(i/(k+2))*M(k,i)+(3+k-i)/(k+2)*M(k,i-1)
9         M(k+1,k+2)=M(k+1,1)
10    LT=M(n,:)
11    return LT

```

11. Un étudiant nous propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

En théorie $\mathbb{P}(X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_5 = 6) = \frac{1}{6!}$ or dans le tableau les valeurs sont distinctes donc c'est un calcul expérimental avec `loi_exp`.

Partie C

12. (a) À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1$$

X_{k+1} a un support fini donc a une espérance. On utilisera le fait que si i n'est pas dans le

support de X_k alors $\mathbb{P}(X_k = i) = 0$. On emploiera aussi le théorème de transfert. On a

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{i=1}^{k+2} i \left(\frac{i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i]) + \sum_{i=1}^{k+2} i \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}([X_k = i-1]) \\
&= \frac{1}{k+2} E(X_k^2) + \sum_{j=0}^{k+2} (j+1) \frac{3+k-j-1}{k+2} \mathbb{P}([X_k = j]) \\
&= \frac{1}{k+2} E(X_k^2) + \sum_{j=1}^{k+2} (j+1) \frac{3+k-j-1}{k+2} \mathbb{P}([X_k = j]) \\
&= \frac{1}{k+2} E(X_k^2) + \sum_{j=1}^{k+2} (j+1) \frac{2+k-j}{k+2} \mathbb{P}([X_k = j]) \\
&= \frac{1}{k+2} E(X_k^2) + \frac{1}{k+2} E((X_k + 1)(2 + k - X_k)) \\
&= \frac{1}{k+2} E(X_k^2 + (2+k)X_k - X_k^2 + 2 + k - X_k) \\
&= \frac{1}{k+2} E((1+k)X_k + 2 + k) = \frac{1+k}{k+2} E(X_k) + 1.
\end{aligned}$$

(b) Dédurre de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(X_k) = \frac{k+2}{2}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}_k : (E(X_k) = \frac{k+2}{2})$.

$\mathcal{H}_0$ est vraie car X_0 constant de valeur 1 donc de moyenne 1.

Si $\mathcal{H}_k$ vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$, alors

$$E(X_{k+1}) = \frac{1+k}{k+2} E(X_k) + 1 = \frac{1+k}{k+2} \frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+1+2}{2}$$

donc $\mathcal{H}_{k+1}$ vraie.

Bilan : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k) = \frac{k+2}{2}$.

(c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.

Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

Il y a autant de B que de N au début de l'expérience, on ajoute une B ou une N à chaque tirage, donc par symétrie, X_k et Y_k ont la même loi et la même espérance. De plus on a toujours $X_k + Y_k$ qui vaut le nombre de boules après k tirages donc $X_k + Y_k = k + 2$ donc $E(X_k) + E(Y_k) = k + 2$ donc $E(X_k) = E(Y_k) = \frac{k+2}{2}$.

On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, V(X_k) = \frac{k+2}{12}$$

13. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1$$

La variable X_k a une variance donc $\frac{X_k}{k+2}$ en a une aussi et on peut appliquer la formule de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - E \left(\frac{X_k}{k+2} \right) \right| \geq \alpha \right) \leq \frac{V \left(\frac{X_k}{k+2} \right)}{\alpha^2}$$

donc

$$0 \leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| \geq \alpha \right) \leq \frac{1}{12(k+2)\alpha^2}$$

en utilisant $E \left(\frac{X_k}{k+2} \right) = \frac{E(X_k)}{k+2} = \frac{1}{2}$ et $V \left(\frac{X_k}{k+2} \right) = \frac{1}{(k+2)^2} V(X_k) = \frac{1}{12(k+2)}$.

Donc $\mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| \geq \alpha \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement.

Donc $\mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| < \alpha \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2} \right| \geq \alpha \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$.

(b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

$\frac{X_k}{k+2}$ représente la proportion de boules blanches dans l'urne après k tirages, intuitivement cette proportion a tendance à être proche de $\frac{1}{2}$ quand k est grand.

Partie D

14. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par .

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & jP(X+1) - iP(X) \end{array}$$

(a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

Soit $A(X), B(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(\alpha A + B) &= j(\alpha A + B)(X+1) - i(\alpha A + B)(X) = j(\alpha A(X+1) + B(X+1)) - i(\alpha A(X) + B(X)) \\ &= \alpha(jA(X+1) - iA(X)) + jB(X+1) - iB(X) = \alpha\varphi_{i,j}(A) + \varphi_{i,j}(B). \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

(b) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$

Si P est nul alors $\varphi_{i,j}(P)$ est nul aussi.

Si $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$ avec $\alpha_n \neq 0$ alors $\mathbb{P}(X+1) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (X+1)^k$ aura le même terme dominant que $\alpha_n (X+1)^n$ car les autres termes sont tous de degrés inférieurs stricts à n donc le terme dominant de $\mathbb{P}(X+1)$ est $\alpha_n X^n$ donc par somme comme $j \neq i$, le terme dominant de $jP(X+1) - iP(X)$ sera $(j-i)\alpha_n X^n$ avec $(j-i)\alpha_n \neq 0$.

Donc $P(X)$ et $\varphi_{i,j}(P)$ ont le même degré.

(c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.

On voit donc que si P n'est pas nul alors $\varphi_{i,j}(P)$ ne l'est pas non plus donc le noyau de $\varphi_{i,j}$ ne contient que le polynôme nul et $\varphi_{i,j}$ est injective.

(d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.

(Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ où n est le degré de P).

Soit $P(X)$ non nul de degré n , on sait que les antécédents éventuels de P par $\varphi_{i,j}$ sont de degré n donc ils sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. On a vu que $\varphi_{i,j}$ préserve le degré donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\varphi_{i,j}$ donc la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est

de dimension finie. Comme $\varphi_{i,j}$ est injective sur $\mathbb{R}[X]$, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est bijective donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ a un antécédent par $\varphi_{i,j}$.

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq i$, en posant

$$P_{1,1}(X) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leq j < i, \quad P_{i,j}(X) = \varphi_{i,j}^{-1}((3 + X - i)P_{i-1,j}(X))$$

et enfin pour tout entier $i > 1$.

$$P_{i,i}(X) = - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)$$

15. (a) Vérifier que : $P_{2,1}(X) = -X - 2$, puis calculer $P_{2,2}(X)$

Par définition, $P_{2,1}(X) = \varphi_{2,1}^{-1}((3 + X - 2)P_{1,1}(X)) = \varphi_{2,1}^{-1}(X + 1)$ or

$$\varphi_{2,1}(-X - 2) = 1 \times (-(X + 1) - 2) - 2(-X - 2) = X + 1 \text{ donc } -X - 2 = \varphi_{2,1}^{-1}(X + 1).$$

Et $P_{2,2} = -P_{2,1}(0) = 2$. On remarquera que $P_{i,i}(X)$ en général est défini une somme de réels donc est un polynôme constant.

- (b) Vérifier que : $P_{3,2}(X) = -2X - 4$

On a $P_{3,2}(X) = \varphi_{3,2}^{-1}((3 + X - 3)P_{2,2}(X)) = \varphi_{3,2}^{-1}(2X)$ or

$$\varphi_{3,2}(-2X - 4) = 2(-2(X + 1) - 4) - 3(-2X - 4) = -4X - 12 + 6X + 12 = 2X \text{ donc } \varphi_{3,2}^{-1}(2X) = -2X - 4.$$

On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + 1$ et $P_{3,3}(X) = 3$.

16. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante .

$$\mathcal{H}_i : \ll \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k)j^k \gg$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_i$, est vraie.

- (a) Montrer que $\mathcal{H}_1$ est, vraie.

$\mathcal{H}_1$ s'écrit : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!} P_{1,1}(k)1^k$. C'est vrai car on sait que $P_{1,1} = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

- (b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathcal{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)! \mathbb{P}([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k$$

En utilisant la formule (*) et la relation $(3 + X - i)P_{i-1,j}(X) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))$ montrer que la suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est géométrique.

Déterminer α_0 et en déduire $\mathcal{H}_i$ que est vraie.

Soit $i \geq 2$, on suppose $\mathcal{H}_{i-1}$ vraie, soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= (k+2)! \mathbb{P}(X_{k+1} = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+2)! \left(\frac{i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2} \mathbb{P}(X_k = i-1) \right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } (*) \\
&= (k+1)! (i \mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i) \mathbb{P}(X_k = i-1)) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+1)! \left(i \mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i) \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k)j^k \right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } \mathcal{H}_{i-1} \\
&= (k+1)! i \mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\underbrace{(3+k-i)P_{i-1,j}(k)j^k}_{\varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))(k)j^k} - P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \right) \\
&= (k+1)! i \mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\underbrace{\varphi_{i,j}(P_{i,j}(X))(k)j^k}_{(jP_{i,j}(X+1) - iP(X))(k)j^k} - P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \right) \text{ par définition de } P_{i,j} \\
&= (k+1)! i \mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\underbrace{(jP_{i,j}(X+1) - iP(X))(k)j^k}_{(j^{k+1}P_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k)j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1})} \right) \text{ par définition de } \varphi_{i,j} \\
&= (k+1)! i \mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=1}^{i-1} (j^{k+1}P_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k)j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}) \text{ par évaluation en } k \\
&= i \left((k+1)! \mathbb{P}(X_k = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k \right) = i\alpha_k.
\end{aligned}$$

Donc (α_k) est géométrique de raison i donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = i^k \alpha_0$.

Or $\alpha_0 = (0+1)! \mathbb{P}(X_0 = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)j^0 = P_{i,i}(X)$ car $i > 1$ donc $\mathbb{P}(X_0 = i) = 0$.

Donc $\alpha_k = -i^k P_{i,i}(X)$ donc $(k+1)! \mathbb{P}(X_k = i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k = i^k P_{i,i}(k)$ car $P_{i,i}$ est un polynôme constant.

$$\text{Donc } (k+1)! \mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k + i^k P_{i,i}(k) = \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k)j^k.$$

Cela prouve que $\mathcal{H}_i$ est vraie.

(c) Conclure.

Le 16(a) initialise la récurrence, le 16(b) assure l'hérédité donc, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^i P_{i,j}(k)j^k.$$

17. (a) En utilisant le résultat de la question 15(a), retrouver le résultat de la question 7(c).

Au 7(c), il est vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}$.

Le 15(a) donne $P_{2,1}(X) = -X - 2$ donc avec la question 16, on a

$$\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^2 P_{2,j}(k)j^k = \frac{1}{(k+1)!} (P_{2,1}(k) + P_{2,2}(k)2^k) = \frac{1}{(k+1)!} (-k-2+2^{k+1}).$$

Les résultats sont identiques.

(b) Déterminer $\mathbb{P}([X_k = 3])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_k = 3) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^3 P_{3,j}(k)j^k = \frac{1}{(k+1)!} (P_{3,1}(k) + P_{3,2}(k)2^k + P_{3,3}(k)3^k)$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 + (-2k-4)2^k + 3^{k+1} \right).$$