

Chapitre 7

Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle

1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Définition d'une limite finie en un point

Notation 1.1.1. Dans toute la suite, $x_0 \in \mathbb{R}$ étant fixé, I désignera un intervalle tel que $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I .

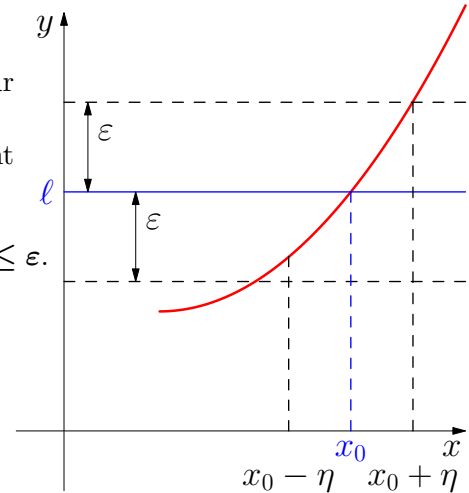
Définition 1.1.2.

Soient x_0 et ℓ deux réels, soit f une fonction définie sur I .

On dit que **f admet pour limite ℓ en x_0** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation 1.1.3. On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.



Définition 1.1.4.

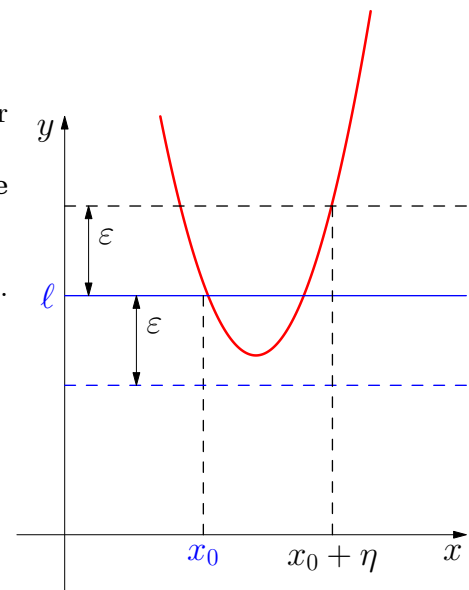
Soient x_0 et ℓ deux réels, soit f une fonction définie sur I .

On dit que **f admet ℓ pour limite en x_0^+ , ou pour limite à droite en x_0** , si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap [x_0, x_0 + \eta], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation 1.1.5. On le note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$



Exemple 1.1.1. Déterminer, si elle existe, la limite à droite de f en $x_0 = 1$ où f est la fonction affine par morceaux définie par $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in [-1, 1[\\ 4x + 2 & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

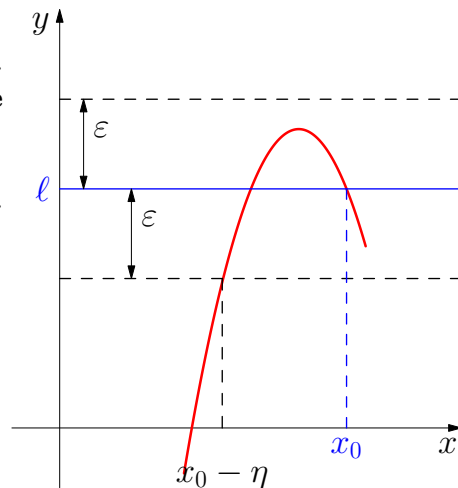
Définition 1.1.6.

Soient x_0 et ℓ deux réels, et f une fonction définie sur I . On dit que f **admet** ℓ pour limite en x_0^- , ou **pour limite à gauche en** x_0 , si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0], |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Notation 1.1.7. On le note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$



Exemple 1.1.2. Déterminer, si elle existe, la limite à gauche de f en $x_0 = 1$, pour f définie dans l'exemple 1.1.1.

Théorème 1.1.1 (Unicité de la limite).

Soit f une fonction définie sur I .

- Si f admet une limite en x_0 , alors cette limite est unique.
- Si f admet une limite en x_0^+ , alors cette limite est unique.
- Si f admet une limite en x_0^- , alors cette limite est unique.

Théorème 1.1.2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . On a l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \right).$$

Exemple 1.1.3. La fonction f de l'exemple 1.1.1 admet-elle une limite en $x_0 = 1$?

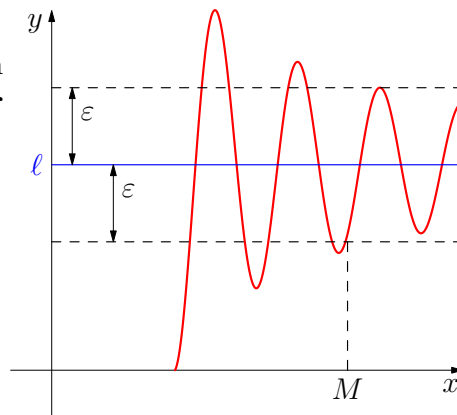
1.2 Extension au cas infini

Définition 1.2.1.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f définie sur un intervalle I de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ a pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x \in I, x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Notation 1.2.2. On le note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.



Exemple 1.2.1. Donnez une définition pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

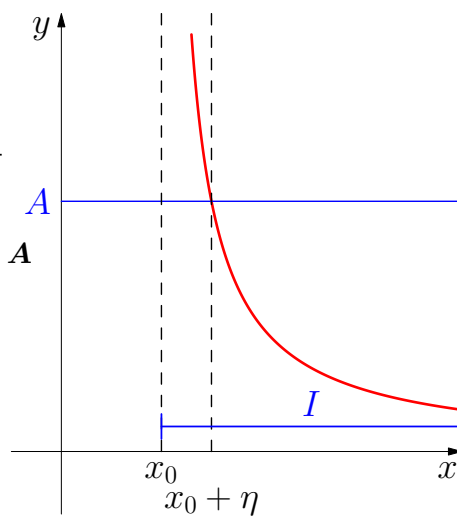
Définition 1.2.3.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

Notation 1.2.4. On le note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.



Exemple 1.2.2. Donnez les définitions de :

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Notation 1.2.5. On rappelle la notation $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.2.6. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On définit **un voisinage de x_0** comme suit :

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, un voisinage de x_0 est un intervalle du type $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ pour un $\eta > 0$.
- Si $x_0 = +\infty$, un voisinage de x_0 est un intervalle du type $]M, +\infty[$ pour un $M \in \mathbb{R}$.
- Si $x_0 = -\infty$, un voisinage de x_0 est un intervalle du type $] - \infty, m[$ pour un $m \in \mathbb{R}$.

1.3 Opérations sur les limites

Théorème 1.3.1. Soient f et g deux fonctions admettant une limite en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, de limites respectives ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \ell$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$.
4. Si $\ell \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.

Proposition 1.3.2 (Formes indéterminées). Il existe quatre types de limites pour lesquelles on ne peut pas conclure directement :

$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$
-------------------	---------------	-------------------------	-------------------

Théorème 1.3.3 (Limite d'une composée).

Soient f et g deux fonctions. Si f est définie sur I voisinage de x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ et si g est définie sur un voisinage J de a avec $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = b.$$

Exemple 1.3.1. Déterminer, si elle existe, la limite de $g \circ f$ en $x_0 = 2$ où $g(x) = e^x$ et $f(x) = \ln(x-2)$.

Théorème 1.3.4. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et si g est bornée, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = 0$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ et si g est bornée, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \pm\infty$.

Exemple 1.3.2. Déterminer, si elle existe, la limite de $f + g$ en $+\infty$ où $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = \cos(x)$.

Théorème 1.3.5 (Limites usuelles). On admettra pour l'instant les limites usuelles suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

1.4 Limites et ordre

Théorème 1.4.1. Soit $f \geq 0$ au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell \geq 0$.

Corollaire 1.4.2. Si $f \geq g$ au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell \geq \ell'$.

Proposition 1.4.3. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > 0$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors il existe un réel $a > 0$ et un voisinage de x_0 sur lequel $f \geq a > 0$.

Exemple 1.4.1. Illustrer cette propriété dans le cas de la limite $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 4 = 2$.

Théorème 1.4.4 (Théorème d'encadrement).

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I telles que :

1. $f \leq g \leq h$ sur un voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$

alors g admet une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Exemple 1.4.2. Démontrer que la fonction $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ admet une limite en $x \rightarrow +\infty$.

1.5 Résultats sur les suites

Théorème 1.5.1. Si f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et si (x_n) est une suite convergeant vers a , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Exemple 1.5.1. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite définie par $u_n = f(x_n)$ où $x_n = \frac{\cos(nx)}{n^2 + 1}$ et $f(x) = \ln(2 + x)$.

Proposition 1.5.2. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$, alors f ne possède pas de limite en a .

Exemple 1.5.2. Soit $f(x) = \sin(x)$. La fonction f admet-elle une limite en $x = +\infty$?

2 Continuité d'une fonction

2.1 Continuité d'une fonction en un point

Définition 2.1.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 2.1.1. Démontrer que la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0.

Définition 2.1.2. Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 2.1.2. Définissez la continuité à gauche.

Par le théorème 1.1.2 on obtient :

Théorème 2.1.1. Une fonction f définie sur un voisinage de x_0 est **continue** en ce point si et seulement si elle y est **continue à droite et à gauche**.

Exemple 2.1.3. Que dire de la continuité en 0 de :

1. la fonction partie entière.

2. la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Théorème 2.1.2 (Stabilité par combinaison linéaire et produit).

L'ensemble des fonctions continues en x_0 forme un ensemble stable par combinaison linéaire et par produit. Soient f et g deux fonctions continues en x_0 et $k \in \mathbb{R}$

- $f + g$ est continue en x_0
- $k f$ est continue en x_0
- $f \times g$ est continue en x_0
- si $f(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

Théorème 2.1.3 (Stabilité par composition).

Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$. La fonction $g \circ f$ est continue en x_0 .

Méthode 2.1.

Pour montrer qu'une fonction f est continue en x_0 , on dispose de deux méthodes :

- On la décompose en somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues en x_0 .
- On montre que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

2.2 Continuité d'une fonction sur un intervalle.

Définition 2.2.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I .

On dit que f est continue sur I si f est continue en chaque point de I .

Par le théorème 2.1.2 on obtient :

Théorème 2.2.1 (Stabilité par combinaison linéaire et produit).

L'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle I forme un ensemble stable par combinaison linéaire et par produit. Soient f et g deux fonctions continues sur I et $k \in \mathbb{R}$

- $f + g$ est continue sur I
- $k f$ est continue sur I
- $f \times g$ est continue sur I
- si $\forall x \in I, f(x) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continue sur I .

Notation 2.2.2. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Et par le théorème 2.1.3 :

Théorème 2.2.2 (Stabilité par composition).

Soit g une fonction continue sur l'intervalle J et f une fonction continue sur I , à valeurs dans J . La composée $g \circ f$ est continue sur I .

Méthode 2.2.

Pour montrer qu'une fonction f est continue sur I , on la décompose en somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues sur I .

Exemple 2.2.1. Démontrer que la fonction $f(x) = \ln(|1 + x|)$ est continue sur $[-10, 10] \setminus \{-1\}$.

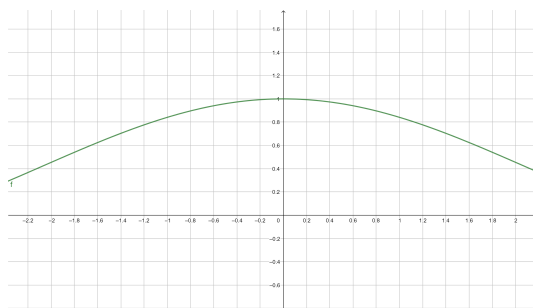
2.3 Prolongement par continuité

Définition 2.3.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0 (resp. à droite, resp. à gauche), **mais pas** en x_0 . Si f admet une limite réelle ℓ en x_0 (resp. à droite de x_0 , resp. à gauche de x_0), alors la fonction g coïncidant avec f sur $\mathcal{D}_f$, et telle que $g(x_0) = \ell$ est continue en x_0 .

La fonction g s'appelle le **prolongement par continuité** (resp. à droite, resp. à gauche) de f en x_0 .

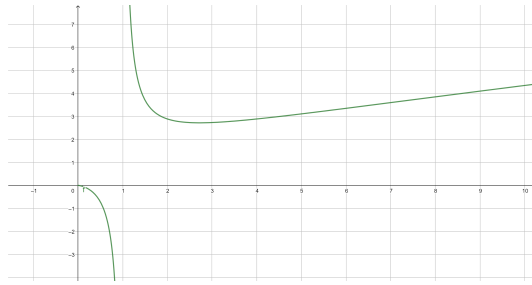
Remarque 2.3.1. Souvent on prolonge f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = \ell$ (on confond alors les fonctions f et g).

Exemple 2.3.1. Soit la fonction f , définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Représentée ci-dessous :



1. Déterminer son domaine de définition et de continuité.
2. Conjecturer graphiquement si f est prolongeable par continuité en 0. Puis le démontrer.

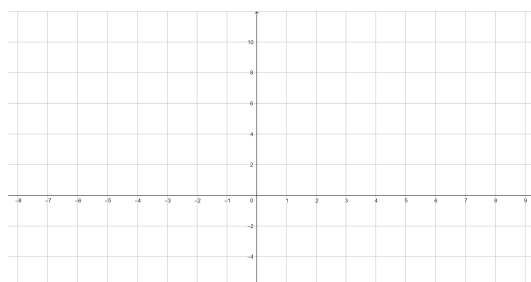
Exemple 2.3.2. Soit la fonction g , définie par $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Représentée ci-dessous :



1. Déterminer son domaine de définition et de continuité.
2. Conjecturer graphiquement si g est prolongeable par continuité en 0 et en 1 puis le démontrer.

Exemple 2.3.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x > 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

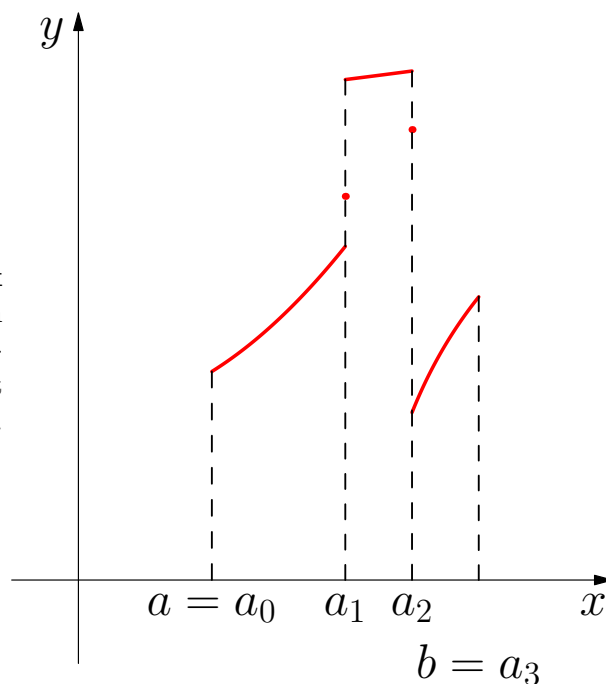
1. Représenter la fonction ci-dessous



2. La fonction est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Définition 2.3.2.

Une fonction f est **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que les restrictions de f à chaque segment $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.



Exemple 2.3.4. Construire une fonction continue par morceaux sur $[-1, 4]$.

3 Étude globale d'une fonction sur un intervalle

3.1 Caractéristiques des fonctions

Définition 3.1.1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I **symétrique par rapport à 0**.

- La fonction f est **paire** si $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$.
- La fonction f est **impaire** si $\forall x \in I, f(x) = -f(-x)$.

Une fonction f est dite **périodique de période T** si :

- $\forall x \in \mathcal{D}_f, x + T \in \mathcal{D}_f$ et
- $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = f(x + T)$.

Exemple 3.1.1. Étudier la parité et la périodicité des fonctions cos et sin sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
- La fonction f est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq m$.
- La fonction f est **bornée** si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

Exemple 3.1.2. La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}^+$?

Théorème 3.1.1. Si f possède une limite finie en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de x_0 .

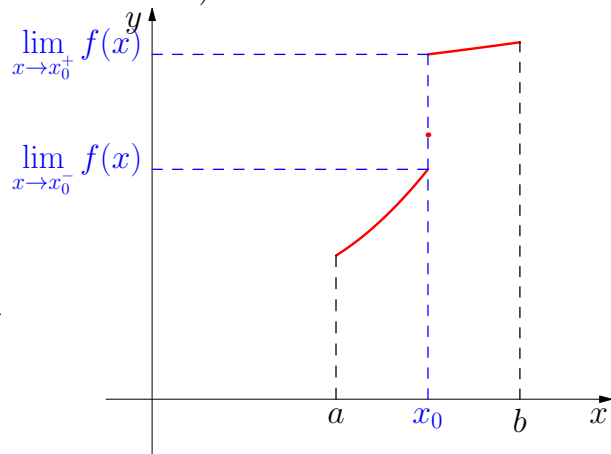
Exemple 3.1.3. Traduire le théorème précédent dans le cas $x_0 \in \mathbb{R}$ et dans le cas $x_0 = +\infty$.

Théorème 3.1.2 (Théorème de la limite monotone).

Soient a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit f monotone sur $]a, b[$ et $x_0 \in]a, b[$.

La fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 .



Théorème 3.1.3. Soit f monotone sur $[a, b[$, avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$

- $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe si et seulement si f est bornée.
- $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$ si et seulement si f n'est pas bornée.

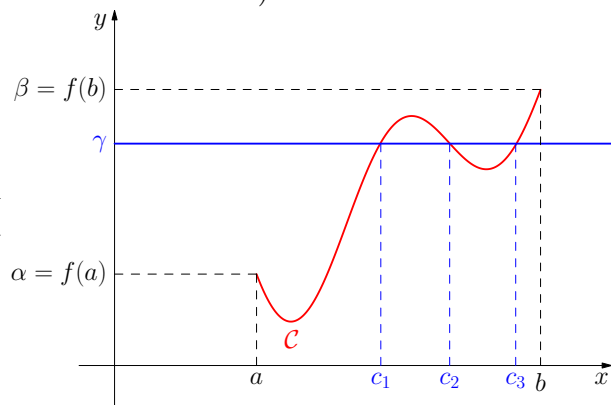
Exemple 3.1.4. Représenter ces deux situations.

Exemple 3.1.5. Soit f une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 3 - \frac{1}{x}$. Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer un majorant de la limite.

3.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.2.1 (Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$, avec $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, et un réel γ tel que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Alors **il existe un réel c** appartenant à $[a, b]$ tel que **$f(c) = \gamma$** .



Exemple 3.2.1. Démontrer que l'équation $x^3 - 4x + 4 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

3.3 Théorème de la bijection

Théorème 3.3.1. Soit f une fonction définie et **continue sur un intervalle I** . Alors l'ensemble $f(I)$ est un intervalle.

Exemple 3.3.1. Soit f définie sur $[1, 5]$ par $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. Calculer $f(I)$.

Corollaire 3.3.2 (Théorème de la bijection).

Toute fonction f **continue et strictement monotone** sur un intervalle I **définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$** .

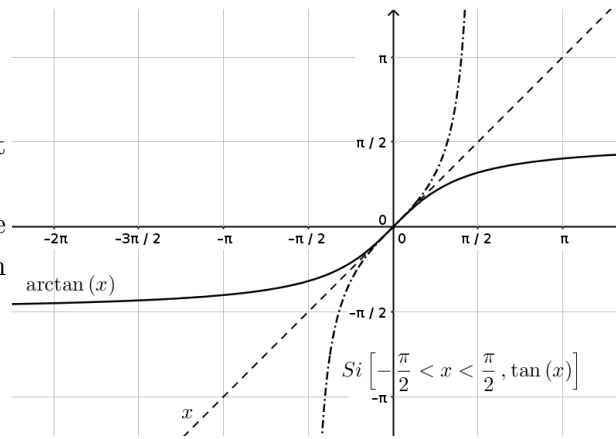
Sa bijection réciproque f^{-1} est elle-même continue et a le même sens de variation.

Exemple 3.3.2. Déterminer le nombre de solution de l'équation $\cos(x) = \frac{1}{3}$ sur $I = [0, 2\pi]$.

Corollaire 3.3.3 (Fonction Arctan).

La fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ définit une bijection.

On appelle **arctangente** et on note $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sa bijection réciproque.



Exemple 3.3.3. Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\arctan(0) =$

2. $\arctan(1) =$

3. $\arctan(-1) =$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) =$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) =$

A compléter

Théorème 3.3.4. L'image d'un intervalle $[a, b]$ borné par une fonction continue est un intervalle $[\alpha, \beta]$ borné.

Corollaire 3.3.5. Si une fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe des réels α et β tels que $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$ et donc des réels c et d dans $[a, b]$ tels que

$$f([a, b]) = [f(c), f(d)]$$

La fonction f possède donc un **maximum** et un **minimum** sur $[a, b]$.

Une fonction continue sur un intervalle borné est bornée et atteint ses bornes.

Illustration 3.3.4. Représenter le graphique d'une fonction sur laquelle ce théorème s'applique, puis d'une fonction sur laquelle il ne s'applique pas.