
Devoir surveillé 1 du 18/09/2026 - Type EDHEC
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 4 pages

Exercice 1. [EDHEC 2017 Ex1]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

1. (a) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de **f(x,n)**, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
1 def f(x,n):  
2     S= 0  
3     for k in range(1,n+1):  
4         S=S+x**k  
5     return S
```

- (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer **f**, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée **f**.

```
1 def f(x,n):  
2     if x==1:  
3         return n  
4     else :  
5         return x*(1-x**n)/(1-x)
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.

f est continue et dérivable (c'est un polynôme) et sa dérivée, donnée par l'expression $f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, est strictement positive sur $[0, 1]$. f réalise donc une bijection croissante de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, n]$. Le nombre $1 \in [0, n]$ possède donc un unique antécédent dans $[0, 1]$ par f .

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$

3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

Or, $\alpha_n \in [0, 1]$, donc $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$$

et comme f_{n+1} est strictement croissante, on peut alors conclure que : $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

Conclusion :

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

Conclusion :

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.

Par définition, α_2 est l'unique solution de l'équation $x + x^2 = 1$ dans $[0, 1]$. Un simple calcul de discriminant donne alors $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De plus $1 \leq \sqrt{5} < 3$ donne directement les inégalités demandées.

Conclusion :

$\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et on a bien $0 \leq \alpha_2 < 1$.

(b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on a pour tout entier $n > 1$:

$$0 \leq \alpha_n \leq \alpha_2 < 1$$

et donc :

$$0 \leq \alpha_n^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1} < 1$$

Or, puisque $\alpha_2 \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$ et par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

Conclusion :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

D'après 1.(b), α_n est l'unique solution, dans $[0, 1]$, de l'équation $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1 - \alpha_n^{n+1}}{1 - \alpha_n} = 2, \quad \text{ou encore :} \quad 1 - \alpha_n^{n+1} = 2(1 - \alpha_n)$$

Or, d'après les questions précédentes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$$

La limite ℓ de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie donc : $1 = 2(1 - \ell)$ et donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Conclusion :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```

1 n=input('entrer la valeur de n :')
2 x=0
3 while f(x,n)<1:
4     x=x+0.001
5 print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On sait déjà que f_n est croissante sur $[0, 1]$ et $f_n(0) = 0$. Le programme va alors tester toutes les valeurs de $f_n(x)$ à partir de $x = 0$ et avec un pas de 0,001 tant que $f_n(x) < 1$.

La valeur affichée par le programme est alors le premier de ces nombres pour lequel $f_n(x) \geq 1$. Le résultat affiché est donc le plus petit nombre du type $k \times 0,001$ ($k \in \mathbb{N}$) supérieur ou égal à α_n .

Conclusion :

Le résultat affiché est donc une valeur approchée par excès à 0,001 près de α_n .

Exercice 2.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et la relation, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Ecrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
On admet dans la suite que le polynôme $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ est annulateur de la matrice A (pn ne demande pas de le vérifier)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrivons :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, calculons :

$$AX_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{pmatrix}$$

On peut donc poser

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}_2[x]$, tel que :

$$x^n = PQ_n + R_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de x^n par $P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$: il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes tel que :

$$x^n = P \times Q_n + R_n \text{ avec } \deg(R_n) < \deg(P) = 3.$$

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

La famille $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2)$ est libre car échelonnée en degrés, de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$. C'est donc une base de l'espace $\mathbb{R}_2[x]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe des réels a_n, b_n et c_n (uniques) tels que :

$$R_n(x) = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2.$$

(c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1, b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x^n = P \times Q_n + a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2 \quad (*)$$

Rappelons que $P = (x-1)^2(x-2)$. P est ici sous forme factorisée, ses racines sont 1 et 2 de multiplicités respectives 2 et 1. En particulier, on a $P(1) = P'(1) = P(2) = 0$.

En évaluant (*) en $x = 2$, on obtient :

$$2^n = \underbrace{P(2)Q_n(2)}_{=0} + a_n + b_n + c_n = a_n + b_n + c_n.$$

En évaluant (*) en $x = 1$, on obtient :

$$1 = \underbrace{P(1)Q_n(1)}_{=0} + a_n = a_n.$$

Dérivons à présent (*) :

$$nx^{n-1} = (P'Q_n + PQ'_n) + b_n + 2c_n(x-1).$$

Evaluons cette dernière égalité en $x = 1$:

$$n = \underbrace{(P'(1)Q_n(1))}_{=0} + \underbrace{P(1)Q'_n(1)}_{=0} + b_n = b_n.$$

On obtient donc $\boxed{a_n = 1, b_n = n \text{ et } c_n = 2^n - a_n - b_n = 2^n - n - 1.}$

3. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I , $A - I$ et $(A - I)^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en substituant A à a dans la relation (*) :

$$A^n = \underbrace{P(A)}_{=0_n} \times Q_n(A) + a_n I + b_n(A - I) + c_n(A - I)^2 = \boxed{I + n(A - I) + (2^n - n - 1)(A - I)^2.}$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n .

Calculons $(A - I_3) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la dernière ligne de $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui nous permet d'obtenir la dernière ligne de A^n :

$$(0 \ 0 \ 1) + n(0 \ 1 \ -1) + (2^n - n - 1)(1 \ -2 \ 1) = \boxed{(2^n - n - 1 \quad -2^{n+1} + 3n + 2 \quad 2^n - 2n)}.$$

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a d'après l'énoncé $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n . Montrons là au rang $n + 1$:

$$X_{n+1} \stackrel{1.(a)}{=} AX_n \stackrel{H.R}{=} A \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion :** Par principe de récurrence, on obtient bien que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Dans la relation de la question précédente, identifions les dernières lignes : le coefficient à la dernière ligne de X_n est u_n , et il s'obtient à partir de la 3-ème ligne de A^n (que nous avons déterminé précédemment) et du vecteur X_0 . Autrement dit :

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * \\ * \\ 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) = -2^n + n + 1.$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

On définit alors la fonction génératrice G_X de X par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k.$$

1. (a) Préciser $G_X(1)$.

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^n P(X = k) = 1 \quad \text{Car } \{X = k\}_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{ est un système complet d'évènement.}$$

(b) Justifier que $E(X) = G'_X(1)$.

Regardons $G'_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)kt^{k-1}$. Donc

$$G'_X(1) = \sum_{k=0}^n kP(X = k) = E(X).$$

(c) Trouver une relation simple entre $V(X)$, $G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.

On a par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Et comme $G''(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)k(k-1)t^{k-2}$,

$$G''(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=0}^n k^2P(X = k) - \sum_{k=0}^n kP(X = k) = E(X^2) - G'(1)$$

Donc

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$$

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $E(t^X) = G_X(t)$.

X étant une variable aléatoire finie, le théorème de transfert nous dit que :

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k P(X = k) = G_X(t)$$

3. Une application.

un basketteur a n paniers à trois points à mettre. Il s'arrête au premier échec. On suppose que s'il se présente au i -ème lancer, la probabilité de réussir le panier est $q_i \in]0, 1[$. Soit X_n la variable aléatoire qui renvoie le nombre de paniers réussis.

- (a) Donner la loi de X_n en fonction des nombres q_i .

Le basketteur tente au maximum n paniers et s'arrête en cas d'échec, ainsi $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. De plus, si on note, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'évènement S_i : "le basketteur met le i -ème panier.". Alors, par la formule des probabilités composées.

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P(\overline{S_1}) = 1 - q_1 \\ P(X_n = 1) &= P(S_1 \cap \overline{S_2}) = P(S_1)P_{S_1}(\overline{S_2}) = q_1(1 - q_2) \\ &\vdots \\ P(X_n = k) &= P(S_1 \cap \dots \cap S_k \cap \overline{S_{k+1}}) = P(S_1) \dots P_{S_1 \dots S_{k-1}}(S_k) P_{S_1 \dots S_k}(\overline{S_{k+1}}) \\ &= q_1 \times \dots \times q_k (1 - q_{k+1}) \\ &\vdots \\ P(X_n = n) &= P(S_1 \cap \dots \cap S_n) = P(S_1) \dots P_{S_1 \dots S_{n-1}}(S_n) = q_1 \times \dots \times q_n \end{aligned}$$

- (b) On se place dans le cas où pour tout indice i , $q_i = q$. On pose $p = 1 - q$. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1/q\}$

$$G_{X_n}(t) = p \frac{1 - (qt)^n}{1 - qt} + (qt)^n.$$

Dans ce cas, en reprenant les calculs précédents avec les q_i tous égaux à q on a : $X_n(\Omega) =$

$$\llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } P(X_n = k) = \begin{cases} q^k(1 - q) & \text{si } 0 \leq k \leq n - 1 \\ q^n & \text{si } k = n \end{cases}. \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} G_{X_n}(t) &= \sum_{k=0}^n P(X = k) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X = k) t^k + P(X = n) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k (1 - q) t^k + q^n t^n \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{n-1} (qt)^k + (qt)^n \\ &= \boxed{p \times \frac{1 - (qt)^n}{1 - qt} + (qt)^n} \quad (\text{somme géométrique}) \end{aligned}$$

(c) En déduire que $E(X_n) = \frac{q}{p}(1 - q^n)$. Préciser la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.

Par la question 1.b), $E(X_n) = G'_{X_n}(1)$. Et par ce qui précède

$$G'_{X_n}(t) = p \times \frac{-nq(qt)^{n-1}(1 - qt) - (1 - (qt)^n)(-q)}{(1 - qt)^2} + nq(qt)^{n-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(X_n) &= G_{X_n}(1) = p \times \frac{-nq^n(1 - q) + (1 - q^n)q}{(1 - q)^2} + nq^n \\ &= p \times \frac{-nq^n p + (1 - q^n)q}{p^2} + nq^n \\ &= \frac{-nq^n p + (1 - q^n)q}{p} + nq^n \\ &= \frac{-nq^n p + (1 - q^n)q + nq^n p}{p} \\ &= \frac{(1 - q^n)q}{p} \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$E(X_n) = \frac{q}{p}(1 - q^n).$$

De plus comme $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{q}{p}.$$

Problème 1 (EDHEC 2024).

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

Pour tout entier n , par opérations, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1 + t^2)^n}$ (dénominateur non nul) est continue sur $[0, 1]$ donc u_n est bien défini.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt \\ &= \int_0^1 \frac{-t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} dt \end{aligned}$$

et pour tout $t \in [0, 1]$: $\frac{-t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} \leq 0$ et par croissance de l'intégration d'une fonction continue sur $[0, 1]$ sur des bornes croissantes ($0 \leq 1$), $u_{n+1} - u_n \leq 0$
Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Comme pour tout $t \in [0, 1]$ on a $\frac{1}{(1 + t^2)^n} \geq 0$, par positivité de l'intégration,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt \geq 0.$$

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

(b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

2. (a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a l'inégalité : $e^{x/2} \leq 1 + x$.

Soit $f : x \mapsto e^{x/2} - (1 + x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - 1$ donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $f'(2 \ln(2)) = 0$ avec $2 \ln(2) = \ln(4) \geq \ln(e) = 1$ car $4 \geq e$ d'où le tableau de signe et de variations :

x	0	1
variations de f'		$\searrow$
signe de $f'(x)$		+
variations de f	0	$\nearrow$
signe de $f(x)$	0	+

et $f(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$ et pour tout x de $[0, 1]$, on a l'inégalité : $e^{x/2} \leq 1 + x$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \in [0, 1]$ donc, d'après la question précédente, $0 < e^{t^2/2} \leq 1 + t^2$

La fonction $x \mapsto 1/x^n$ étant décroissante sur $]0, +\infty[$, $e^{-nt^2/2} \geq \frac{1}{(1+t^2)^n}$.

Et par croissance de l'intégration de fonctions continues sur des bornes croissantes,

$$\int_0^1 e^{-nt^2/2} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

et $u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$

(c) Pour les cubes : Justifier que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{-nt^2/2} = \exp\left(-\left(\frac{t}{1/\sqrt{n}}\right)^2/2\right)$

Et si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$ une densité est $t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{t}{1/\sqrt{n}}\right)^2/2\right)$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-nt^2/2} dt$ converge et vaut 1 et par linéarité d'intégrales convergentes,

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$

(d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La relation de Chasles donne, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-nt^2/2} dt + \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt$ et comme chacune de ces intégrales (de fonction positives sur des bornes croissantes) est positive,

$$\int_0^1 e^{-nt^2/2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt.$$

Comme $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ et que $\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

par encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Partie 2

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par opérations, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est impropre en $+\infty$.

$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$, intégrale de Riemann, converge car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $2n > 1$

Et par équivalence de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $1+t^2 \geq t^2 > 0$ et $x \mapsto 1/x^n$ strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$.

De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ converge (Riemann) et par croissance de l'intégrale convergente de fonctions continues,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$$

et pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{1}{t^{2n}} dt = \left[\frac{-1}{2n-1} \frac{1}{t^{2n-1}} \right]_1^A = \frac{1}{2n-1} \left(1 - \frac{1}{A^{2n-1}} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1}$$

d'où $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \frac{1}{2n-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$

- (b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Comme, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$ et $\frac{1}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

On a $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = u_n + I_n$ et chacune de ces intégrales tend vers 0 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

5. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. et $A > 0$.

On intègre par parties $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ avec

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} : u'(t) = \frac{-n}{(1+t^2)^{n+1}} \times 2t$$

$$v'(t) = 1 \text{ et } v(t) = t$$

les fonctions u et v étant C^1 sur $[0, A]$, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A - \int_0^A \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} - 0 + 2n \int_0^A \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}} dt - 2n \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + 2nJ_n - 2nJ_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})}$

(b) Déterminer J_1 .

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ et } \int_0^A \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(A) - \arctan(0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \pi/2$$

Donc $\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}}$

(c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.

D'après b), $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$ et $\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$ donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{J_n}{n} = \sum_{n \geq 1} 2(J_n - J_{n+1}) \text{ est une série télescopique.}$$

Avec $2J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, elle est donc convergente et sa somme est $2J_1 - 2 \times 0$.

c'est à dire $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = 2 \frac{\pi}{2} = \pi.}$

(d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n .

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$, on a donc $J_{n+1} = J_n \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$

Soit $J_k = J_{k-1} \left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right)$ d'où le calcul de J_n par récurrence :

```
1 def suiteJ(n):
2     J=np.pi/2
3     for k in range(2,n+1):
4         J=(1-1/(2*(k-1)))*J
5     return J
```

6. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- pour $n = 0$ on a : $\frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{0}{0}}{4^0} = \frac{\pi}{2} = J_{1+0}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ alors

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= J_{n+1} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{2n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!^2(n+1)^2} = 2 \binom{2n}{n} \frac{2n+1}{n+1}$$

et on retrouve bien $J_{n+2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4^n} \frac{1}{4} \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{4^{n+1}} \binom{2(n+1)}{n+1}$

- Par récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de « piles » (resp. « faces ») obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. (a) Donner, en justifiant, la loi de X_n .

X_n est le nombre de « piles » en $2n$ expériences indépendantes. Par équiprobabilité de pile et face, elles ont toutes la même probabilité $1/2$ de donner pile.

Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2)$

- (b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n)$.

Comme les lancers ne peuvent donner que pile ou face, $X_n + Y_n = 2n$, et par conséquent on a l'égalité entre les événements : $[X_n = Y_n] = [2X_n = 2n] = [X_n = n]$

avec $n \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ on a donc $P(X_n = Y_n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ d'après la question 6.

Et comme $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) = 0$

- (c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.

Comme pile et face jouent des rôles symétriques, la probabilité qu'il y ait plus de pile que de face est la même que celle qu'il y ait plus de face que de pile et $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$

- (d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de « piles » que de « faces » lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$([X_n < Y_n], [X_n = Y_n], [X_n > Y_n])$ est un système complet d'événements.

Donc la somme des leurs probabilité vaut 1 et avec $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$, on a donc $2P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n) = 1$

et $P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2} (1 - P(X_n = Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

Donc la probabilité d'avoir strictement plus de piles que de faces tend vers $1/2$

8. Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k^e lancer et 0 sinon.

- (a) Vérifier que l'on a $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

Z_k vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k^e lancer et 0 donc Z_k compte le nombre de pile obtenu lors du $k^{ième}$ lancer.

Le nombre total de pile(s) obtenus lors de $2n$ premiers lancers est donc $X_n = \sum_{k=1}^{2n} Z_k$

Pour les cubes

En appliquant le théorème limite central à la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}$$

Les $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ sont des variables indépendantes ayant toutes la même loi avec une variance $V(Z_k) = \frac{1}{4}$ non nulle.

Leur moyenne empirique est $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$, d'espérance $\frac{1}{2}$, de variance $\frac{1}{n^2} \frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$ par indépendance.

La centrée réduite $\bar{Z}_n^* = \sqrt{4n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k - \frac{1}{2} \right]$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.

En particulier les termes d'indices pairs $\bar{Z}_{2n}^* = 4\sqrt{n} \left[\frac{1}{2n} X_n - \frac{1}{2} \right]$

Avec $Y_n = 2n - X_n$, on a $[X_n \leq Y_n] = [X_n \leq n] = \left[\frac{X_n}{2n} \leq \frac{1}{2} \right] = [\bar{Z}_{2n}^* \leq 0]$

On a finalement, $\boxed{P(X_n \leq Y_n) = P(\bar{Z}_{2n}^* \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(0) = \frac{1}{2}}$

(b) Retrouver le résultat établi à la question 7)d).

Avec $(X_n \leq Y_n) = (X_n < Y_n) \cup (X_n = Y_n)$, union disjointe on a :

$P(X_n \leq Y_n) = P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n)$ et on retrouve bien

$$\boxed{P(X_n < Y_n) = P(X_n \leq Y_n) - P(X_n = Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}}$$