Ex 13

1) Généralisation de la démonstration de la convergence de la série harmonique alternée vue à l'ex 12

On pose $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k\right)$ la suite des sommes partielles

On montre que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k v_k$$

$$= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+1} v_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$

Car (v_n) ↘.

Donc (S_{2n}) est ↘

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k v_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k v_k$$

$$= (-1)^{2n+3} v_{2n+3} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2}$$

$$= v_{2n+2} - v_{2n+3} \geq 0 \text{ car } (v_n) \searrow$$

Donc (S_{2n+1}) est ↗

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} (-1)^{2n+1} v_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} -v_{2n+1} = 0 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles ont donc la même limite S. Comme les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) de (S_n) sont convergentes vers la même limite S alors (S_n) converge vers cette limite.

Ainsi la série $\sum (-1)^n V_n$ cvge.

2) On veut montrer que (U_n) vérifie les conditions de la q 1 c'est-à-dire que $U_n = (-1)^n V_n$ avec $(V_n) \searrow$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$.

Soit i) U_n du signe de $(-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $(-1)^n U_n \searrow$

iii) $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\forall t \in [n\pi ; (n+1)\pi]$

$\sin(t)$ est du signe de $(-1)^n$

$t \geq 0$

Donc $\frac{\sin t}{t}$ du signe de $(-1)^n$

Alors $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est du signe de $(-1)^n$ par positivité de l'intégrale.

Donc U_n est du signe de $(-1)^n$. □

ii) Etudions (V_n) définie par $V_n = (-1)^n U_n$

$$V_{n+1} - V_n = (-1)^{n+1} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt - (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= (-1)^{n+1} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + (-1)^{n+1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$= (-1)^{n+1} \left(\int_{n\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \right)$$ par la relation de Chasles.

2) ii) Donc $V_{n+1} - V_n = (-1)^{n+1} \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right)$

$= (-1)^{n+1} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+(n+1)\pi)}{u+(n+1)\pi} du \right)$

Par changements de variables affines : $u = t - n\pi$

et $u = t - (n+1)\pi$

Soit $V_{n+1} - V_n = (-1)^{n+1} \left(\int_0^{\pi} (-1)^n \frac{\sin u}{u+n\pi} du + \int_0^{\pi} (-1)^{n+1} \frac{\sin u}{u+(n+1)\pi} du \right)$

$= (-1)^{2n+1} \int_0^{\pi} \sin u \left(\frac{1}{u+n\pi} - \frac{1}{u+(n+1)\pi} \right) du$

$= - \int_0^{\pi} \sin u \left(\frac{\pi}{(u+n\pi)(u+(n+1)\pi)} \right) du$

On $\forall u \in [0, \pi]$ $\sin u \geq 0$ $\frac{1}{(u+n\pi)(u+(n+1)\pi)} \geq 0$

Donc par croissance de l'intégrale :

$V_{n+1} - V_n \leq 0$

Donc $(V_n) \searrow$.

3ii) Enfin,

$$r_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+n\pi)}{u+n\pi}\,du$$

$$= (-1)^n \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{\sin u}{u+n\pi}\,du$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,du$$

On $\forall u \in [0,\pi]$ $\quad 0 \leqslant \sin u \leqslant 1$

donc $\quad 0 \leqslant \frac{\sin u}{u+n\pi} \leqslant \frac{1}{u+n\pi} \leqslant \frac{1}{n\pi}$

Alors $\quad 0 \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,du \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,du = \frac{1}{n}$

Donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, par le thm d'encadrement

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$. □

La suite (U_n) vérifie donc les conditions de la q1. donc la série $\sum U_n$ crge. □.