Ex 10 :

1) $u_n = \frac{x^n}{n}$ $\quad |u_n| = \frac{|x|^n}{n}$

Si $|x| < 1$ on remarque que $|u_n| \leq |x|^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Or $\sum |x|^n$ cvge comme série géométrique de raison $|x| < 1$

Donc par critère de comparaison des séries à termes ≥ 0,

$\sum |u_n|$ cvge et $\sum u_n$ cvge absolument.

Si $|x| \geq 1$ alors $\frac{|x|^n}{n} \geq \frac{1}{n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ dvge comme série harmonique.

Donc par critère de comparaison des séries à termes ≥ 0.

$\sum |u_n|$ dvge donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument

Ainsi $\sum u_n$ cvge absolument $\Leftrightarrow |x| < 1$.

2) $\int_0^x t^{k-1} dt = \frac{x^k}{k}$

Donc $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{i=0}^{n-1} t^i dt$

$= \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

$= \left[-\ln(1-t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

Exo ②

a) Soit $x \in [-1;1[$.

Supposons $x \in [-1;0]$

Alors $\forall t \in [x;0]$ alors $1 \leqslant 1-t \leqslant 1-x$

Donc $1 \geqslant \frac{1}{1-t} \geqslant \frac{1}{1-x}$

Donc $t^n \geqslant \frac{t^n}{1-t} \geqslant \frac{t^n}{1-x}$

Donc $\int_x^0 t^n dt \geqslant \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt \geqslant \int_x^0 \frac{t^n}{1-x} dt$

Ainsi $\int_0^x t^n dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

On $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ car $x \in [-1;0]$. Donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$

Supposons maintenant que $x \in [0;1[$.

Alors $\forall t \in [0;x]$, $\frac{t^n}{1-x} \geqslant \frac{t^n}{1-t} \geqslant t^n$

Donc $\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \geqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt \geqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \geqslant \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

De même $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} = 0$ Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$

Dans tous les cas $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ □

c) D'après les questions 2a) et 2b),

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \lim_{n\to+\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= -\ln(1-x) - \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt}_{=0}$$

$\forall x \in [-1,1[\quad = -\ln(1-x)$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -\ln(1-x)$$

3)a) $\frac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. On $\sum \frac{1}{n^2}$ cvge donc par critère d'équivalence

$\sum \frac{1}{n^2-1}$ cvge.

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3/4$.

par télescopage (décalage de 2 donc 2 termes restants)

b) $\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{x^k}{k-1} + \frac{x^k}{k+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k+1}\right)$$

$i = k-1$ dans la 1ère
$i = k+1$ dans la 2ème

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x^{i+1}}{i} + \sum_{i=3}^{n+1} \frac{x^{i-1}}{i}\right)$$

Donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(x \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x^i}{i} + \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x^i}{i} - x - \frac{x^2}{2}\right)\right)$ Ex 10 (4)

Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(x\left(-\ln(1-x)\right) + \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\right)$

$= -\frac{1}{2}\ln(1-x)\left(x+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x.$

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{2}\ln(1-x)\left(x-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$

$= \lim_{x\to 1} -\frac{1}{2}\ln(1-x)\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$

$= \lim_{x\to 1} -\frac{1}{2}\ln(1-x)\frac{(x-1)(x+1)}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ car $\lim_{x\to 1} \ln(1-x)\times(x-1) = 0$ par les croissances comparées.

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = f(1)$

Donc f est continue en 1.