Ex 7

1) $u_n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}$

Si $\alpha \geq 0$

$n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Si $\alpha > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Si $\alpha = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^1$

Si $0 < \alpha < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si $\alpha \leq 0$ $\lim n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1+n^{-\alpha}\right) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

En résumé : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n > 1 \\ e^1 & \text{si } n = 1 \\ +\infty & \text{si } n < 1 \end{cases}$

2) $\sum (u_n - 1)$.

Si $\alpha \leq 1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n - 1 \neq 0$ donc la série diverge grossièrement.

Si $\alpha > 1$ $\quad u_n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)} - 1$

$\sim n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ $\quad$ car $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = 0$ par 9.1

$\sim n \times \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad$ car $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

$\sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \geq 0$

On $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ cvge ssi $\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$ comme Série de Riemann.

Donc par critère d'équivalence des séries à termes ≥ 0

$\sum (u_n - 1)$ cvge $\iff \alpha > 2$.