Ex 8

1) $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$

2) Pour que $\sum u_n$ converge il est nécessaire que (u_n) tende vers 0.

On $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$

$= \ln\left(n(n+1)^a(n+2)^b\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(n(n+1)^a(n+2)^b\right) = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)^a(n+2)^b = 1$

On $n(n+1)^a(n+2)^b \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1+a+b}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1)^a(n+2)^b = 1 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} n^{1+a+b} = 1 \iff 1+a+b = 0.$

Donc il est nécessaire que $1+a+b=0$.

On pose donc $b = -1-a$.

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) - \ln(n+2) - a\ln(n+2)$$

Regardons alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n de la série.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + a\ln(k+1) - \ln(k+2) - a\ln(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+2) + a\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k+2)$$

↓ par télescopage

$$= \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+1) - \ln(n+2) + a\left(\ln(2) - \ln(n+2)\right)$$

$$= (1+a)\ln(2) - \ln(n+1) - \ln(n+2) - a\ln(n+2)$$

$$= (1+a)\ln(2) - \ln\left((n+1)(n+2)^{1+a}\right)$$

On pour que la série converge il faut que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et soit finie.

$$\text{et } \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (1+a)\ln 2 - \ln\left((n+1)(n+2)^{1+a}\right)$$

$$= (1+a)\ln(2) - \lim_{n\to+\infty} \ln\left((n+1)(n+2)^{1+a}\right)$$

$$\text{On } (n+1)(n+2)^{1+a} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times n^{1+a} = n^{2+a}$$

Donc • si $a < -2$ $\lim_{n\to+\infty} n^{2+a} = 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left((n+1)(n+2)^{1+a}\right) = -\infty$

• si $a > -2$ $\lim_{n\to+\infty} n^{2+a} = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left((n+1)(n+2)^{1+a}\right) = +\infty$

• Si $a = -2$ $\lim_{n\to+\infty} n^{2+a} = \lim_{n\to+\infty} n^0 = 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left((n+1)(n+2)^{1+a}\right) = 0$

Ainsi (S_n) cvge $\Leftrightarrow$ $a = -2$, $b = -1-a = 1$

et alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = (1+a)\ln 2 = -\ln 2$.

Donc si $(a,b) \neq (-2;1)$ la série diverge.

Si $(a,b) = (-2,1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$