Ex 8

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{x^n}{(n!)^2}\right| = \frac{|x|^n}{(n!)^2} \leq \frac{|x|^n}{n!}$ $\forall n \geq 0$ car $n! \geq 1$

On $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ cvge comme série exp donc par critère de comparaison $\sum \frac{|x|^n}{(n!)^2}$ cvge. Donc $\sum \frac{x^n}{(n!)^2}$ cvge absolument donc converge

2) $f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(n!)^2}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - y^n}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}{(n!)^2} + \underbrace{\frac{x^0 - y^0}{(0!)^2}}_{=0}$

$= (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}{(n!)^2}$

Donc $|f(x) - f(y)| = |x-y| \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}}{(n!)^2} \right|$

$\leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|x|^k |y|^{n-1-k}}{(n!)^2}$

$\leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k \times z^{n-1-k}}{(n!)^2}$

$\leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1}}{(n!)^2}$

$\leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n z^{n-1}}{(n!)^2}$

$\frac{1}{n!} \geq \frac{1}{n!^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!}$

Donc $|f(x)-f(y)| \leq |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$ $\Big\}$ $k=n-1$

$\leq |x-y| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$

$\leq e^z |x-y|$

2) Soit $x_0 \in [0, +\infty[$, Alors par la question précédente.

$0 \leq |f(x_0+h)-f(x_0)| \leq e^{\max(x_0+h, x_0)} |h|$

$\lim_{h \to 0} e^{\max(x_0+h, x_0)} |h| = 0$ car $\lim_{h \to 0} e^{\max(x_0+h, x_0)} = e^{x_0}$

et $\lim_{h \to 0} h = 0$

Donc par le théorème d'encadrement $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$

Donc $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Donc f est continue en x_0 $\forall x_0 \in [0, +\infty[$.

Donc f est continue sur $[0, +\infty[$

3) $f(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \geq x$

De plus $f(x) - 1 = f(x) - f(0)$

Donc par la question 2 $f(x) - f(0) \leq e^x \times (x-0) = e^x x$

Alors $1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq e^x$

$\lim_{x \to 0} e^x = 1$ Donc par le thm d'encadrement

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ Donc $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$

Ex 9

4) Soit $x>0$. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t f(t)^2}$ est continue sur $[1,x]$ (ou $[x,1]$) car f est continue et ne s'annule pas sur $[1,x]$ (ou $[x;1]$). Ainsi $g(x)$ est bien définie $\forall x>0$.

Remarquons alors :

$$g(x)-\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t f(t)^2}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t f(t)^2} - \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{1-f(t)^2}{t f(t)^2}\,dt$$

$$= \int_x^1 \frac{f(t)^2-1}{t f(t)^2}\,dt = \int_x^1 \frac{f(t)-1}{t} \times \frac{f(t)+1}{f(t)^2}\,dt$$

On $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-1}{t} = 1$ et $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)+1}{f(t)^2} = 2$.

Donc $t \mapsto \frac{f(t)-1}{t} \times \frac{f(t)+1}{f(t)^2}$ est prolongeable par continuité en 0.

Donc $\int_0^1 \frac{f(t)-1}{t} \times \frac{f(t)+1}{f(t)^2}\,dt$ est donc convergente car faussement impropre. Soit I sa valeur.

On a alors.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)-\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1}{t f(t)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{f(t)-1}{t} \times \frac{f(t)+1}{f(t)^2}\,dt$$

$$= I$$

Ainsi $g(x)-\ln(x) \underset{x\to 0^+}{=} I + o(1)$ donc $g(x) \underset{x\to 0^+}{=} \ln(x) + I + o(1)$

Donc $g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$ □