Lycée Louis Thuillier Année 2026-2027
ECG2

Devoir maison 2 pour le .....

Exercice 1 (Ecricome 2020)**.**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$

   (a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   On se place désormais sous cette condition.

   (b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

   $$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$

   $$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   (d) En déduire que :

   $$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

   (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

(f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

(b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}$$

(d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

(e) La série $\sum_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

(d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$