

Chapitre 3

Variables aléatoires discrètes et espérance conditionnelle

1 Variables aléatoires réelles

Dans tout le chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On rappelle que dans cette notation :

- Ω désigne l'univers c'est-à-dire l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire
- $\mathcal{A}$ est un ensemble des événements c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ vérifie les conditions suivantes
 - (i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
 - (ii) $\Omega \in \mathcal{A}$
 - (iii) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$
 - (iv) Si $(A_i)_{i \in I}$ sont des événements appartenant à $\mathcal{A}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$
- P est une probabilité sur l'ensemble probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ c'est-à-dire
 - (i) P est une application $\mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$
 - (ii) $P(\Omega) = 1$
 - (iii) Si $(A_i)_{i \in I}$ sont des événements disjoints deux à deux alors

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

1.1 Définitions

Définition 1.1.1.

Une **variable aléatoire réelle** est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [X \leq x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Exemple 1.1.1. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$ est une variable aléatoire réelle

Proposition 1.1.1.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles, λ un réel quelconque. Alors $X + Y$, XY , $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ et λX sont des variables aléatoires réelles.

Remarque 1.1.1.

- La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.
- Il est très rare que l'on vous demande de montrer qu'une application est bien une variable aléatoire.

1.2 Fonction de répartition

Définition 1.2.1.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition de X** la fonction $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

Proposition 1.2.1.

Soit X une variable aléatoire réelles, F_X sa fonction de répartition. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$:

$$P(X > a) = 1 - F_X(a) \quad ; \quad P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Définition 1.2.2.

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **loi de X** la donnée des probabilités $P(X \in I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.2.

Soit X une variable aléatoire réelle. La loi de X est entièrement caractérisée par sa fonction de répartition F_X .

Théorème 1.2.3 (Caractérisation d'une fonction de répartition).

Une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si, et seulement si, elle satisfait les trois points suivants :

- (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- (ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

De plus, on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t \rightarrow x^-} F(t)$$

Proposition 1.2.4.

Si F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire X . Alors F est continue à gauche (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini ou dénombrable de points x_i .

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Définition

Définition 2.1.1.

Une variable aléatoire réelle X est dite **discrète** lorsque son ensemble image $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X , est dénombrable.

On dit plus précisément que X est une variable **discrète finie** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini et **discrète infinie** lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemple 2.1.1.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors X est discrète finie car $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X est discrète infinie car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Dans la suite de ce chapitre, les variables aléatoires seront systématiquement discrètes.

Notation : Lorsque cela sera nécessaire, on fixera une numérotation de son ensemble image $X(\Omega)$ qu'on notera :

- $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ si X est fini,
- $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ si X est discrète infinie.

2.2 Loi d'une variable aléatoire discrète**Proposition 2.2.1.**

Soit F une fonction de répartition d'une variable aléatoire X . Alors X est discrète si et seulement si F est une fonction en escalier.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{\substack{z \in X(\Omega) \\ z \leq x}} P(X = z)$$

Exemple 2.2.1.

Soit X la variable aléatoire donnant la valeur obtenue en lançant un dé équilibré. Tracer sa fonction de répartition.

Remarque 2.2.1.

A partir de la fonction de répartition F_X , on peut retrouver :

- $X(\Omega)$: c'est l'ensemble des points de discontinuité de F_X ;
- $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$: c'est la "hauteur du saut" à l'abscisse x .

Et réciproquement, à partir de $X(\Omega)$ et des probabilités $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, on peut reconstruire la loi F_X de X . On a donc :

Proposition 2.2.2 (Caractérisation de la loi d'une variable discrète).

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors la loi de X est entièrement caractérisée par la donnée :

- de l'ensemble image $X(\Omega)$ de X ;
- de tous les $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Méthode 2.1.

Pour déterminer loi d'une variable aléatoire discrète X , on donnera :

- l'ensemble image $X(\Omega)$ de la variable X ;
- la valeur de $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple 2.2.2.

Donner la loi d'une variable aléatoire X donnant la valeur obtenue lors d'un lancer de dé équilibré.

Proposition 2.2.3.

Si X est une variable aléatoire discrète, alors $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier :

- $\forall x \in X(\Omega), P(X = x) \geq 0$;
- la famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Proposition 2.2.4.

Soient I un ensemble fini ou dénombrable, et $(p_k)_{k \in I}$ une famille de réels satisfaisant :

1. $\forall k \in I, p_k \geq 0$;
2. la famille $(p_k)_{k \in I}$ est sommable et sa somme vaut 1.

Alors la famille $(p_k)_{k \in I}$ définit une **loi de probabilité**, c'est-à-dire qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X sur cet espace tels que :

$$X(\Omega) = I \text{ et } P(X = k) = p_k \text{ pour tout } k \in I.$$

Remarque 2.2.2.

Concrètement cela signifie que pour montrer que $(p_k)_{k \in I}$ définit une loi de probabilité, on vérifiera que :

- si $I = \llbracket 0, n \rrbracket$,
 - (i) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_k \geq 0$,
 - (ii) $\sum_{k=0}^n p_k = 1$.
- si $I = \mathbb{N}$,
 - (i) $\forall k \in \mathbb{N}, p_k \geq 0$,
 - (ii) $\sum p_k$ converge (absolument) et sa somme est égale à 1.

Exemple 2.2.3.

Justifier l'existence d'une variable aléatoire Y satisfaisant $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

3 Espérance, Variance, moments d'ordre r

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition 3.1.1.

On dit qu'une variable aléatoire discrète X admet une **espérance** si la série $\sum x_k P(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle **espérance de X** , notée $E(X)$, la somme de cette série :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

Remarque 3.1.1.

- Dans le cas d'une variable aléatoire finie, la série est en réalité une somme finie et converge donc forcément il n'est pas nécessaire de justifier la convergence.
- Une variable aléatoire discrète infinie n'admet pas nécessairement d'espérance. Par exemple la variable Y définie à l'exemple 2.2.3 n'admet pas d'espérance.

Proposition 3.1.1 (Linéarité de l'espérance).

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance qui vaut :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Remarque 3.1.2.

En particulier si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance, alors pour tous réels a et b , la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une espérance, et :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Théorème 3.1.2 (Existence d'une espérance par domination).

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement, et si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance et on a :

$$|E(X)| \leq E(Y)$$

Exemple 3.1.1.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique, et soit $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y admet une espérance.

Proposition 3.1.3.

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance.

- Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$ (positivité de l'espérance)
- Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$ (croissance de l'espérance)

Théorème 3.1.4 (Théorème de transfert).

Soient X une variable aléatoire discrète et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète. De plus :

- Si X est une variable aléatoire discrète finie :
La variable aléatoire $g(X)$ est finie donc possède une espérance, et :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

- Si X est une variable aléatoire discrète infinie :
La variable aléatoire $g(X)$ est discrète et elle possède une espérance si, et seulement si, la série $\sum g(x_k)P(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

Exemple 3.1.2.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $Y = e^X$ et $Z = \frac{1}{X+1}$. Montrer que X et Z admettent une espérance et les calculer.

3.2 Moments d'ordre r , variance**Définition 3.2.1.**

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X admet un **moment d'ordre r** si X^r possède une espérance. C'est-à-dire par le théorème de transfert, si la série $\sum x_k^r P(X = x_k)$ converge absolument. On note alors $m_r(X) = E(X^r)$ le **moment d'ordre r** de X :

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$$

Proposition 3.2.1.

Si X admet un moment d'ordre r , alors il admet un moment à tout ordre $s \leq r$.

Remarque 3.2.1.

En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition 3.2.2.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. On dit que X admet une **variance** si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. On appelle alors **variance** de X cette espérance, notée $V(X)$:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Remarque 3.2.2.

Comme $(X - E(X))^2 \geq 0$, par positivité de l'espérance (sous réserve d'existence)

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] \geq 0.$$

Théorème 3.2.2 (Formule de Koenig-Hyugens).

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.

X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2, et alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Proposition 3.2.3.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Pour tout réel a et b , la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une variance, et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Proposition 3.2.4. Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors :

$$X \text{ est constante presque sûrement} \Leftrightarrow V(X) = 0.$$

Définition 3.2.3.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle **écart-type** de X , et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Définition 3.2.4.

Soit X une variable aléatoire discrète.

- X est dite **centrée** si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- X est dite **réduite** si X admet une variance et $V(X) = 1$

Proposition 3.2.5. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $\frac{X}{\sigma(X)}$ est réduite ;
- $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle **la variable aléatoire centrée réduite associée à X** .

4 Espérance conditionnelle, Espérance totale

Rappel. Soit A un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $B \in \mathcal{A}$, on définit la **probabilité de B sachant A** par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Alors P_A est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 4.0.1.

Soit une variable aléatoire X , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle **la loi de X sachant A** la loi de X pour la probabilité P_A c'est-à-dire la donnée des $P_A(X = x_k)$ pour tout $x_k \in X(\Omega)$

Exemple 4.0.1.

Le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir de semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chaque client choisit, indépendamment du choix de ses voisins, de la viande avec probabilité p et du poisson avec probabilité $1 - p$. On note Y le nombre de clients qui choisissent de la viande.

Quelle est la loi de Y sachant $(X = n)$?

Définition 4.0.2.

On appelle **espérance conditionnelle de X sachant A** (ou **conditionnellement à A**), et on note $E(X|A)$, l'espérance de X , si elle existe, pour la probabilité conditionnelle P_A . Dans,

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x_k P_A(X = x_k).$$

Remarque 4.0.1.

- Très souvent, la loi de X sachant A est usuelle et l'espérance conditionnelle en découle immédiatement.
- On peut choisir indifféremment de sommer sur $X(\Omega)$ ou $X(A)$ pour calculer $E(X|A)$, les probabilités $P_A(X = x)$ pour $x \notin X(A)$ étant nulles.

Exemple 4.0.2.

Dans l'exemple 4.0.1 Déterminer l'espérance de Y sachant $(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.0.1 (Formule de l'espérance totale).

Soit $(A_n)_{n \in I}$ un système complet d'évènements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in I$.

Une variable discrète X admet une espérance si, et seulement si :

- (i) pour tout $n \in I$, $E(X|A_n)$ existe ;
- (ii) $\sum P(A_n)E(|X||A_n)$ converge (absolument).

Dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n \in I} P(A_n)E(X|A_n) = \sum_{n \in I} \sum_{x \in X(\Omega)} x P_{A_n}(X = x) P(A_n).$$

Remarque 4.0.2.

- En pratique, la variable X est toujours positive, et donc on remplacera $E(|X||A_n)$ par $E(X|A_n)$.
- Si X est finie, elle admet une espérance et la formule de l'espérance totale s'applique alors sans se soucier des problèmes de convergence.

Exemple 4.0.3.

Toujours avec l'exemple 4.0.1, en déduire que Y admet une espérance et la calculer.

Remarque 4.0.3.

Lorsque l'on utilise la formule de l'espérance totale, on précise toujours au préalable le système complet d'évènements que l'on utilise.

Lois usuelles

Expériences associées aux différentes lois classiques.

- Lois issues d'un tirage unique :
 - Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré.
 - Loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$: valeur obtenue lors d'un tirage équiprobable dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N .
- Lois issues d'une répétition de tirages avec remise :
 - Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: nombre de succès lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
 - Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: rang du premier succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

La loi de Poisson ne correspond pas à une situation typique mais à une loi limite (de la loi binomiale). Elle se rencontre lorsqu'on répète un grand nombre de fois et de manière indépendante une expérience aléatoire dont la réalisation est rare. Lorsqu'il faut l'utiliser, l'énoncé l'indique explicitement.

Table des lois discrètes usuelles

	Notation	Paramètres	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}([X = k])$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Loi uniforme	$\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
	$\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$	$(a, b) \in \mathbb{N}^2$ $b \geq a$	$\llbracket a, b \rrbracket$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)(b-a+1)}{12}$
Loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(1, p)$	$p \in [0, 1]$	$\{0, 1\}$	$\begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1-p & \text{si } k = 0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$p \in]0, 1]$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda \geq 0$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ