

TD 7 - Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle

Exercice 1.

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur intervalle de définition.

- | | |
|--|--|
| <p>1. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$</p> <p>2. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$</p> <p>3. $h(x) = \frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 9 - 6x}$</p> | <p>3. $i(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}$</p> <p>4. $j(x) = x + \cos(x)$</p> <p>5. $k(x) = x - \sqrt{x + 1}$</p> |
|--|--|

Exercice 2.

Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en x_0 .

- | | |
|--|---|
| <p>1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{ x }{x}$ en $x_0 = 0$.</p> <p>2. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ en $x_0 = 0$.</p> | <p>3. f définie sur $\mathbb{R}$ par</p> $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\ln(\ln(x))} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ <p>en $x_0 = 1$.</p> |
|--|---|

Exercice 3.

Déterminer les limites des fonctions suivantes.

- | | |
|---|---|
| <p>1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x + 1$ en $+\infty$.</p> <p>2. $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$ en $+\infty$.</p> | <p>3. $f(x) = \sin x \sin(1/x)$ en 0.</p> <p>4. $f(x) = \sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 1}$ en $+\infty$.</p> |
|---|---|

Exercice 4.

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x , c'est-à-dire le seul nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

1. Déterminer $f(x)$ pour tout $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. (a) Montrer que $\forall x > 0, 1 - x \leq f(x) \leq 1$. En déduire que f admet une limite à droite en 0.
(b) Montrer que f admet une limite à gauche en 0.

Exercice 5.

Étudier la continuité de f .

1. $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
2. $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 6.

Déterminer si les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$</p> <p>2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)} & \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$</p> | <p>3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$</p> <p>4. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$</p> |
|---|--|

Exercice 7.

Soit f continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8.

Soient f et g continues sur $[0, 1]$ telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exercice 9.

Soit f continue, positive sur $[0, +\infty[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$.
Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10.

Démontrer que l'équation suivante a au moins une solution réelle :

$$x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$$

Exercice 11.

Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0, |f(x)| = |g(x)|$$

Montrer que $g = f$ ou $g = -f$.

Exercice 12.

Montrer que l'équation $x = e^{-x^2}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13.

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer que $|f|$ possède un maximum sur $\mathbb{R}_+$, c'est à dire : montrer que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq |f(\alpha)|$$

Exercice 14.

Soient f et g telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$. Déterminer les limites en a de $\max(f, g)$ et de $\min(f, g)$.