
TD 3 - Variables aléatoires discrètes, Espérance conditionnelle

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire.
2. Montrer que X possède une espérance et que $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
3. X admet-elle une variance ?

Exercice 2. *

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i l'évènement "le jeton i est dans la poignée tirée" et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'évènement A_i ? En déduire la loi de Y_i .
2. Exprimer X en fonction des Y_i , et en déduire $E(X)$.

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour $\alpha \in [-1; 1]$; la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance et majorer $|E(Y)|$.
2. Montrer que si X admet une espérance, il en est de même de $Y = \ln(X)$.

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et soit $\alpha > 0$. On pose $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$. Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Exercice 5.

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi tous les sauts précédents, de hauteurs $1, 2, \dots, n$. La probabilité de succès au $n^{\text{ième}}$ saut vaut $p_n = \frac{1}{n}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement "le sauteur réussit le $k^{\text{ième}}$ saut" et on note X la va égale au numéro du dernier saut réussi.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(X = n)$ en fonction des S_k .
(b) Déterminer la loi de X et vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Exercice 6. *

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Pour tout entier k , donner une relation liant $P(X = k)$, $P(X > k)$ et $P(X > k - 1)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nP(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.
4. En déduire que $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

Exercice 7. *[Loi de Pascal et loi binomiale négative]

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1 - p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1, 1[$, alors la série $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$

converge et sa somme vaut $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r -ème succès.
 - (a) Que dire de X_1 ?
 - (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
 - (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.
On dit que X_r suit la loi de Pascal de paramètre (r, p) .
2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\frac{r}{p}$.
 (b) Montrer que $E(X_r(X_r + 1))$ existe et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\frac{rq}{p^2}$.
3. On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r -ème succès.
 - (a) Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?
 - (b) En déduire la loi de Y_r , son espérance et sa variance.
 - (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}.$$

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

On dit que Y_r suit la loi binomiale négative de paramètre (r, p) .

Exercice 8. **[QSP HEC 2013]

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0 , p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = \frac{5}{3}$. Calculer p_0 , p_1 et p_2 .
2. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$. On suppose que $E(X)$, $E(X^2)$, ..., $E(X^n)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?

Exercice 9.

Soit $n > 2$. On dispose dans une urne de n boules numérotées de 1 à n , indiscernables au toucher.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de k tirages avec remise de boules de cette urne. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de fois où on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à i lors des k premiers tirages.

Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance. En particulier, que valent $E(X_n)$ et $V(X_n)$? Pourquoi était-ce prévisible?

Exercice 10. *

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor$.

Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $p = p(2 - p)$. En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 11. *[Une caractérisation de la loi géométrique]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que X suit une loi géométrique.

Montrer que :

$$\forall n, h \in \mathbb{N}^*, P_{X>n}(X > n + h) = P(X > h)(*).$$

On dit que la loi géométrique est sans mémoire.

2. Réciproquement, on suppose que la condition (*) est vérifiée.

(a) Montrer que la suite $(P(X > n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = P(X > 1)$.

(b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 12.

Un joueur dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de pile à chaque lancer est p (où $p \in]0, 1[$).

Le joueur lance le dé puis lance la pièce autant de fois que le nombre apparu sur le dé. Soit X le nombre de pile obtenus.

1. Calculer l'espérance de X sachant que le dé a donné le nombre k (où $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$).
2. Calculer $E(X)$ si elle existe.
3. Ecrire une fonction Python d'en-tête `def simul(p)` prenant en entrée un réel $p \in]0, 1[$ et renvoyant une réalisation de la variable X .

Exercice 13.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "pile", et on note N le nombre de lancers qui ont été nécessaires. On effectue alors une série de N lancers et on note X le nombre de "faces" obtenus lors de ces lancers.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi de X conditionnellement à l'évènement $(N = n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X|(N = n))$ existe et la calculer.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Simulation Python.
 - (a) Ecrire une fonction Python d'en-tête `def simul()` renvoyant une réalisation de la variable X .
 - (b) Ecrire une fonction Python d'en-tête `Simul(n)` renvoyant un vecteur de taille n contenant n réalisations indépendantes de la variable X .
 - (c) A l'aide de la fonction `Simul`, déterminer une estimation de $E(X)$ et vérifier ainsi le résultat de la question 3.

Exercice 14. *

Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n .

On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée, on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i .

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k -ème tirage.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $E(X_{k+1} | X_k = i)$.
2. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$, et en déduire la valeur de $E(X_k)$.
3. Ecrire une fonction **Python** d'en-tête **simul(n,k)** prenant en entrée des entiers n et k supérieurs à 1, et renvoyant une réalisation de la variable X_k .

Exercice 15. *

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges (b et $r \in \mathbb{N}$). On tire des boules de l'urne une par une, sans remise, jusqu'à ce que la première boule blanche soit tirée. On appelle $X_{b,r}$ le nombre de boules rouges qu'il faut tirer (avant d'obtenir la première boule blanche).

1. Justifier que $X_{b,r}$ admet une espérance. On la notera $E_{b,r}$.
2. On considère la variable aléatoire Y qui vaut 1 si la première boule tirée est rouge et 0 si la première boule tirée est blanche.
 - (a) Déterminer $E(X_{b,r} | Y = 0)$.
 - (b) Exprimer $E(X_{b,r} | Y = 1)$ en fonction de $E_{b,r-1}$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.
 - (c) Déterminer une relation de récurrence entre $E_{b,r}$ et $E_{b,r-1}$ (pour $r \in \mathbb{N}^*$), puis donner $E_{b,0}$, $E_{b,1}$ et $E_{b,2}$, puis enfin $E_{b,r}$.

Exercice 16 (Fonction génératrice).

Partie I : Cas d'une variable aléatoire discrète finie. (*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

On appelle fonction génératrice de X la fonction polynômiale G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ($p \in]0, 1[$) puis $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'(1)$ et $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.
4. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

En déduire que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X .

Partie II : Cas d'une variable aléatoire discrète infinie (***)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} P(X = k)t^k$ est absolument convergente.

On appelle alors fonction génératrice de X la fonction G définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\forall [-1, 1], G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k.$$

2. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0, +\infty[$) puis $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$).
3. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $G(t) = E(t^X)$.

4. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

(a) Vérifier que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \frac{G(t) - G(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right).$$

(b) En déduire que $t \mapsto \frac{G(t) - G(1)}{t - 1}$ est croissante et majorée par $E(X)$ sur $[0, 1[$. Que peut-on en conclure ?

(c) En remarquant que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \sum_{k=1}^n \left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) \leq \frac{G(t) - G(1)}{t - 1},$$

montrer que $G'(1) = E(X)$.

5. On suppose dans cette question que G est dérivable en 1 (nécessairement à gauche vu son ensemble de définition).

En utilisant la majoration du 4c, montrer que X admet une espérance, égale à $G'(1)$.