Devoir maison 1 pour le .....

Exercice 1 (Polynômes de Lagrange et matrice de Vandermonde)**.**
Soient $a_0, ..., a_n$, $n+1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_i : x \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - a_k}{a_i - a_k} = \frac{x - a_0}{a_i - a_0} \times ... \times \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \times \frac{x - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \times ... \times \frac{x - a_n}{a_i - a_n}.$$

1. Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$ (on pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$).

   - Supposons $i = j$. On cherche donc $L_i(a_i)$. On a :

   $$L_i(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} 1 = 1$$

   - Maintenant si $i \neq j$. On a alors :

   $$L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = \frac{a_j - a_j}{a_i - a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i \\ k\neq j}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = 0$$

   Ainsi :

   $$L_i(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

2. Montrer que $\mathcal{B} = (L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
   Commençons par montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
   Soit $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_0 L_0 + ... + \lambda_n L_n = 0 (*)$. Alors pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ en évaluant $(*)$ en $x = a_i$, on obtient :

   $$\lambda_0 L_0(a_i) + ... + \lambda_{i-1} L_{i-1}(a_i) + \lambda_i L_i(a_i) + \lambda_{i+1} L_{i+1}(a_i) + ... + \lambda_n L_n(a_i) = 0$$

   Or d'après la question précédente cela nous donne donc :

   $$0 + ... + 0 + \lambda_i + 0 + ... + 0 = 0$$

   Soit $\lambda_i = 0$ et ce pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.
   De plus la famille $\mathcal{B}$ contient $n+1$ polynôme et $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$. La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de P.
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ on cherche $\lambda_0, ..., \lambda_n$ tels que

   $$P = \lambda_0 L_0 + ... + \lambda_n P_n (**).$$

   En s'inspirant de la question précédente, pour $i \in [\![0, n]\!]$, évaluons cette égalité $(**)$ en $x = a_i$. On obtient :

   $$P(a_i) = \lambda_0 L_0(a_i) + ... + \lambda_{i-1} L_{i-1}(a_i) + \lambda_i L_i(a_i) + \lambda_{i+1} L_{i+1}(a_i) + ... + \lambda_n L_n(a_i)$$

   Soit $P(a_i) = \lambda_i$.
   Ainsi

   $$P = P(a_0) L_0 + P(a_1) L_1 + ... + P(a_n) L_n.$$

4. Notons $\mathcal{C} = (1, x, .., x^n)$. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.
   Par ce qui précède :
$$\begin{cases} 1 & = 1L_0 + 1L_1 + ... + 1L_n \\ x & = a_0L_0 + a_1L_1 + ... + a_nL_n \\ & \vdots \\ x^k & = a_0^kL_0 + a_1^kL_k + ... + a_n^kL_n \\ & \vdots \\ x^n & = a_0^nL_0 + a_1^nL_1 + ... + a_n^nL_n \end{cases}$$
   Ainsi :
$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

   - Si il existe $i \neq j$ tel que $a_i = a_j$ alors il est évident que la matrice ne sera pas inversible (il y aura deux lignes égales).
   - Si les a_i sont tous distincts, on remarque alors que la matrice étudiées est celle de la question 4. Or on a vu en q2 que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. Nécessairement la matrice est alors inversible.

Exercice 2.
Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$. On pose :
$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\},$$
$$G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\},$$
$$H = \{P \in E,\ P(x) = P(-x)\}.$$
Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

- Commençons par montrer que la somme est directe. Soit $(P_F, P_G, P_H) \in F \times G \times H$ tel que
$$P_F + P_G + P_H = 0 (*)$$
  Alors, en évaluant $(*)$ en $x = 1$ et en $x = 2$, on obtient :
$$P_H(1) = 0 \text{ et } P_H(2) = 2$$
  Or par définition de H, on obtient alors également :
$$P_H(-1) = P_H(1) = 0 \text{ et } P_H(-2) = P_H(2) = 0.$$
  Le polynôme P_H possède donc au moins 4 racines, or il est de degré au plus $3 < 4$ c'est donc nécessairement le polynôme nul.
  Il nous reste donc $P_F + P_G = 0$. Or en évaluant en $x = 3$, on obtient $P_F(3) = 0$. Donc P_F s'annule en 0, 1, 2 et 3, donc de même que pour P_H, $P_F = 0$.
  Et donc $P_G = 0$.
  On a donc bien $F \oplus G \oplus H$.

- Regardons alors les dimensions. En effet il suffit maintenant de vérifier que $\dim(F)+\dim(G)+\dim(H)=\dim(\mathbb{R}_3[x])$.
  Cherchons donc une base de F, de G et de H.
  Pour F :

$$\begin{aligned} P\in F &\Leftrightarrow \begin{cases}\deg(P)\leq 3\\ P(0)=P(1)=P(2)=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\deg(P)\leq 3\\ P=x(x-1)(x-2)Q, Q\in\mathbb{R}[x]\end{cases}\\ &\Leftrightarrow P=x(x-1)(x-2)\lambda \end{aligned}$$

  Ainsi $F=\text{Vect}(x(x-1)(x-2))$. La famille $(x(x-1)(x-2))$ est donc génératrice de F et composée d'un seul vecteur elle est donc libre, c'est une base de F. Ainsi $\dim(F)=1$.
  Pour G : De la même manière que pour F, on trouve $\dim(G)=1$.
  Pour H :

$$\begin{aligned} P\in H &\Leftrightarrow \begin{cases}P=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\\ P(x)=P(-x),\ \forall x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}P=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\\ -a_3x^3+a_2x_2-a_1x+a_0=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\ \forall x\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}P=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\\ -a_3=a_3\\ -a_1=a_1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow P=a_2x^2+a_0 \end{aligned}$$

  Ainsi $H=\text{Vect}(x^2,1)$. La famille $(x^2,1)$ est génératrice de H et composée de deux polynômes non colinéaires dont elle est également libre. C'est une base de H et H est donc de dimension 2.