Lycée Louis Thuillier Année 2026-2027
ECG2

Devoir maison 3 pour le .....

Exercice 1.

Partie I : Préliminaires

On considère un ensemble E non vide que l'on partage en deux sous-ensembles,nommés A et B. On note n_1 le cardinal de A et n_2 le cardinal de B. Soit $n \leq \min(n_1, n_2)$ On choisit au hasard un sous-ensemble M de E, de cardinal n. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de A présents dans M.

1. (a) Déterminer $X(\Omega)$

   (b) Justifier que : $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \dfrac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$.

   On dira que X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, n_1, n_2)$.

   (c) En déduire la formule, dite de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$.

2. Montrer que $E(X) = n\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$

3. Calcul de la variance de X.

   (a) Montrer que X admet une variance.

   (b) Calculer $E(X(X-1))$.

   (c) En déduire les valeurs de $E(X^2)$, puis de $V(X)$.

Partie II : Tirages dans une urne

Une urne contient n boules blanches et n boules noires ($n \geq 1$). A chaque étape, on ajoute n boules noires, puis on extrait n boules au hasard (que l'on ne remet pas dans l'urne) parmie les $3n$ boules que se trouvent alors dans l'urne. On note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la i-ème étape.

3. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance.

4. Soit i un entier naturel non nul, j et k deux entiers naturels tels que $k \leq j$.

   (a) Calculer $P_{X_i=j}(X_{i+1} = k)$.

   (b) Reconnaître la loi de X_{i+1} conditionnellement à l'évènement $(X_i = j)$, puis donner la valeur de $E(X_{i+1}|[X_i = j])$.

   (c) Déterminer finalement $E(X_i)$.