

Chapitre 4

Applications linéaires

1 Rappels

Dans tout le chapitre E et F désignent des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(x, y) \in E^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque 1.1.1.

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors nécessairement $f(0_E) = 0_F$.

Exemple 1.1.1.

- Id_E est linéaire.
- La transposition $t : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto {}^t A$ est linéaire.
- L'évaluation d'un polynôme en $a : f_a : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(a)$ est linéaire.
- La dérivation est linéaire.
- L'intégration est linéaire.

Exemple 1.1.2.

1. Montrer que l'application $f_1 : (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + 2z, x - 5z)$ est linéaire.

2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P'(5)$ est linéaire.

Remarque 1.1.2.

Attention : On ne dit pas qu'une application linéaire est stable par combinaison linéaire. Cela n'a pas de sens, on dit simplement que f est linéaire.

Ce sont les sous-espaces vectoriels qui sont stables par combinaison linéaire.

Proposition 1.1.1.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Définition 1.1.2.

On dit que $f : E \rightarrow F$ est :

- injective si :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$$

- surjective si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Soit $f(E) = F$

- bijective si f est injective et surjective.

Définition 1.1.3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme**, et on notera $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Si f est bijective on dit que f est un **isomorphisme**, et on notera $\mathcal{GL}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F .
- Si f est un endomorphisme bijectif on dira que f est un **automorphisme**, et on notera $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphisme de E .

Exemple 1.1.3.

- L'application Id_E est un automorphisme
- La transposée est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1.1.2.

Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme. Soit $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa bijection réciproque. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Proposition 1.1.3.

On suppose que E et F sont de même dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

- (i) f est bijective ;
- (ii) $\exists g \in \mathcal{L}(F, E), g \circ f = Id_E$;
- (iii) $\exists h \in \mathcal{L}(F, E), f \circ h = Id_F$.

Et dans ce cas, $f^{-1} = g = h$.

1.2 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1.

On appelle **noyau de f** , et on note $\ker(f)$, l'ensemble :

$$\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Proposition 1.2.1.

- $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exemple 1.2.1.

Déterminer le noyau de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.

Définition 1.2.2.

On appelle **image de f** , et on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E : f(x) = y\}.$$

Proposition 1.2.2.

- $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- f est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.

1.2.2 Cas de la dimension finie.

Proposition 1.2.3.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose E de dimension finie, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, et :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Définition 1.2.3.

On suppose E de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang de f** , et on note $\text{rg}(f)$, l'entier :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Remarque 1.2.1.

Par la proposition 1.2.3. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors le rang de f est le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Théorème 1.2.4 (Théorème du rang).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

Exemple 1.2.2.

Déterminer le rang et l'image de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.

Corollaire 1.2.5.

On suppose que E et F sont de même dimension **finie**, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

Remarque 1.2.2.

- Attention dans l'utilisation de ce résultat à toujours bien dire que les dimensions sont égales et surtout finies. En effet le résultat ne tient pas en dimension infinie. Par exemple $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective.
- Le résultat est en particulier vrai si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Proposition 1.2.6.

On suppose que E est de dimension finie n , et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors l'application :

$$\phi_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & M_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

□

Proposition 1.2.7.

On suppose E et F de dimension finie. Alors il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$ si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$.

1.3 Projection

Définition 1.3.1.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Pour tout $z \in E$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.

- Le vecteur x est appelé **la projection de z sur F parallèlement à G** , et noté $p(z)$.
- L'application $p : E \rightarrow E$ ainsi définie est appelée le **projecteur sur F parallèlement à G** .

Illustration graphique en dimension 2 :

Proposition 1.3.1.

- (i) p est linéaire.
- (ii) $p \circ p = p$
- (iii) $\ker(p) = G$ et $\operatorname{Im}(p) = F = \ker(p - \operatorname{Id}_E)$. Ainsi :

$$\forall y \in G, p(y) = y \text{ et } \forall x \in F, p(x) = x.$$

Proposition 1.3.2.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p.$$

Plus précisément dans ce cas $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \ker(p)$ et p est le projecteur sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Définition 1.3.2.

Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E , et soit p et q les projecteurs associés. On appelle **symétrie par rapport à F dans la direction de G** l'endomorphisme

$$s = p - q = Id_E - 2q.$$

Illustration graphique en dimension 2 :

2 Matrice d'une application linéaire

2.1 Définition

Définition 2.1.1.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** , notée $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$ c'est-à-dire pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la j -ème colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \\ f_n \end{matrix}$$

$$\text{où } f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

Remarque 2.1.1.

- $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.
- **Cas d'un endomorphisme :** Si $E = F$, on prend alors la même base au départ et à l'arrivée $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- Lorsque cette base est la base canonique on parle de matrice canoniquement associée à f (et d'application linéaire canoniquement associée à M dans l'autre sens)

Exemple 2.1.1.

Ecrire la matrice canoniquement associée à $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.

Proposition 2.1.1. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$.

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) + \mu M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(g).$$

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors :

$$M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \times M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

Corollaire 2.1.2.

Soient E et F de dimension finie n et p , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F .

- L'application $\phi_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Si E et F sont tous deux de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration.

□

Proposition 2.1.3.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas : $(M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1} = M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1})$.

Proposition 2.1.4.

Supposons E et F de dimension finie, et considérons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Notons alors :

- A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$;
- X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$;
- Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

Alors :

$$Y = AX.$$

2.2 Changement de base

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , alors $M_{\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}'}(f)$ sont a priori deux matrices différentes. Cette partie explique comment passer de l'une à l'autre.

2.2.1 Matrice de passage

Définition 2.2.1.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

On appelle **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$** la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Plus précisément, si on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, alors :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_j & \cdots & f_n \\ p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,j} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,j} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,j} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{matrix}$$

$$\text{où } f_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i.$$

Remarque 2.2.1.

Par définition, on a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$ puisque

$$Id_E(f_j) = f_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i.$$

Exemple 2.2.1.

Considérons la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.

Proposition 2.2.1.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E de dimension finie. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

2.2.2 Changement de bases

Proposition 2.2.2.

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $x \in E$. Notons :

- X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$;
- X' la matrice de x dans la base $\mathcal{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors :

$$X = PX'.$$

Démonstration.

□

Exemple 2.2.2.

On se place dans le contexte de l'exemple 2.2.1. Soit u un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, 0, 1)$. Déterminer ses coordonnées dans la base canonique.

Théorème 2.2.3 (Formule de changement de bases).

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Notons :

- A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$;
- A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Exemple 2.2.3.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire explicitement $f(u)$ pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$ et $f_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

4. En déduire la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2.2.

Soient deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

2.3 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.3.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle **trace de** A , et on note $\text{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Exemple 2.3.1.

- $\text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \right) =$
- $\text{Tr}(I_n) =$
- $\text{Tr}(0_n) =$

Proposition 2.3.1.

L'application $\text{Tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \text{Tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire. Donc :

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$$

pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

□

Proposition 2.3.2.

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\text{Tr}({}^t A) = \text{Tr}(A)$.
- $\text{Tr}(A \times B) = \text{Tr}(B \times A)$.

Démonstration.

□

Proposition 2.3.3.

Si deux matrices sont semblables, alors elles ont la même trace.

Démonstration.

□

Remarque 2.3.1.

Attention deux matrices qui ont la même trace ne sont pas nécessairement semblables. Par ex $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables même si elles ont la même trace.

2.4 Retour sur le rang d'une matrice**Proposition 2.4.1.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F . Le rang de $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est égal au rang de l'application linéaire f .

Définition 2.4.1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\varphi_A : \begin{matrix} \mathcal{M}_{p,1} & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1} \\ X & \mapsto & AX \end{matrix}$ l'application linéaire canoniquement associée à A .

- On appelle **noyau de A** , et on note $\ker(A)$, le noyau de φ_A . Ainsi :

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = 0_{n,1}\}.$$

- On appelle **image de A** , et on note $\text{Im}(A)$, l'image de φ_A . Ainsi :

$$\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) : Y = AX\}.$$

Proposition 2.4.2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, φ_A l'application linéaire canoniquement associée à A .

1. $\text{rm}(A) = \text{rg}(\varphi_A)$.
2. Théorème du rang : $p = \dim(\ker(A)) + \text{rg}(A)$.

Exemple 2.4.1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\ker(A)$, $\text{Im}(A)$, $\text{rg}(A)$.

Proposition 2.4.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0_{n,1}\} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n.$$

Démonstration.

□

Proposition 2.4.4.

1. Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.
2. Deux matrices semblables ont le même rang.

Remarque 2.4.1.

Attention la réciproque est fautive : deux matrices de même rang ne sont pas forcément semblables.

Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de rang 2, mais elles ne sont pas semblables.

2.5 Retour sur les projecteurs

On suppose que E est de dimension finie n .

Proposition 2.5.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est un projecteur de rang r ;
- (ii) il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}) = A_r ;$$

- (iii) $M_{\mathcal{B}}(f)$ est semblable à A_r .

Démonstration.

□

Remarque 2.5.1.

Il est donc aisé d'écrire la matrice d'un projecteur f dans une base adaptée à la somme directe $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$. Et pour obtenir la matrice de f dans une autre base, on appliquera les formules de changement de bases.

3 Polynômes d'endomorphisme

3.1 Définitions

Définition 3.1.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ est bien définie et $f^k \in \mathcal{L}(E)$.

Par convention on pose : $f^0 = \text{Id}_E$.

Définition 3.1.2.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^d a_k x^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k f^k = a_d f^d + \dots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E$$

Exemple 3.1.1.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P : x \mapsto x^3 - 4x + 2$, $P(f) = f^3 - 4f + 2\text{Id}_E$.

Remarque 3.1.1.

Attention le terme constant a_0 dans P devient $a_0 \text{Id}_E$ dans $P(f)$.

Proposition 3.1.1.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$
- $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Remarque 3.1.2.

ATTENTION : Pour $x \in E$, ne pas confondre $P(f)(x)$ et $P(f(x))$:

$$P(f(x)) = a_n (f(x))^n + \dots + a_1 f(x) + a_0$$

n'a pas de sens ($(f(x))^n$ n'a pas de sens dans E : il n'y a pas de produit dans un espace vectoriel).
Alors que $P(f)(x)$ est l'évaluation en $x \in E$ de l'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 3.1.2.

- Les endomorphisme $P(f)$ et $Q(f)$ commutent : $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.
- Si A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, alors A^k est la matrice de f^k dans la base $\mathcal{B}$ et donc $P(A)$ est la matrice de $P(f)$ dans la base $\mathcal{B}$.

3.2 Polynômes annulateurs

Définition 3.2.1.

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un **polynôme annulateur de f** lorsque $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exemple 3.2.1.

Donner un polynôme annulateur d'un projecteur p .

Proposition 3.2.1.

P est un polynôme annulateur de f si, et seulement si, P est un polynôme annulateur de sa matrice dans une base quelconque.

Proposition 3.2.2.

- On suppose que E est de **dimension finie**.
Tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur non nul.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

Démonstration.

□

4 Sous-espaces stables

Définition 4.0.1.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable par f** si :

$$\forall x \in F, f(x) \in F.$$

Exemple 4.0.1.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On remarque que $f(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $f(E) \subset E$. Donc, les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par f .
- Soit $E = \mathbb{R}[x]$, $f : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{matrix}$ et $F = \mathbb{R}_n[x]$.

Si $\deg(P) \leq n$, alors $\deg(f(P)) = \deg(P') \leq n - 1$ et donc $f(P) \in F$. Donc F est stable par f .

Proposition 4.0.1.

On suppose que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

F est stable par f si, et seulement si, $f(e_i) \in F$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Démonstration.

□

Exemple 4.0.2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (5x + 3y, -6x - 4y)$. Montrer que $\text{Vect}((1, -2))$ est stable par f .

Proposition 4.0.2.

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent.

Alors les sous-espaces vectoriels $\ker(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f .

Démonstration.

□

Proposition 4.0.3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Les sous-espaces vectoriels $\ker(P(f))$ et $\text{Im}(P(f))$ sont stables par f .
2. Les sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par f .
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\ker(f - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par f .

Démonstration.

□

Définition 4.0.2.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f .

L'application $\tilde{f} : \begin{matrix} F & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$ est un endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit par f sur F** .

Remarque 4.0.1.

L'hypothèse " F stable par f " assure que l'application induite $\tilde{f}$ est à valeurs dans F .

Exemple 4.0.3.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . Soit p le projecteur sur F parallèlement à G .

1. Justifier que F et G sont stables par p .

2. Déterminer les endomorphismes induits $\tilde{p}$ et $\bar{p}$ respectivement sur F et G .

Proposition 4.0.4.

Supposons E de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E . Soit $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F qu'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre :

1. F est stable par f ;
2. $M_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$ (matrice triangulaire par blocs).

Démonstration.

□