

TD 4 -Applications Linéaires

Exercice 1.

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

• $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y - z, -x + 2y + z) \end{array}$ • $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{array}$ • $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ P & \mapsto & P - (x + 1)P' \end{array}$	• $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$ • $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \mapsto & P(x + 1) - P(x) \end{array}$ • $k : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
--	--

Exercice 2. *

Soient E, F, G des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Leftrightarrow \text{Im}(f) \subset \ker(g)$;

Exercice 3. **[Noyaux et images itérés]

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \text{Im}(u^k)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k et I_k sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u satisfaisant $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. (a) On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $N_r = N_{r+1}$. Montrer que pour tout $k \geq r$, $N_r = N_k$.
 (b) En déduire qu'il existe un entier $p \leq n$ tel que $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, N_k \neq N_{k+1} \\ \forall k \geq p, N_k = N_{k+1} = I_p \end{cases}$
 (c) Montrer qu'on a aussi $\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, I_k \neq I_{k+1} \\ \forall k \geq p, I_k = I_{k+1} = I_p \end{cases}$
3. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$, puis que l'endomorphisme induit par u sur N_p est nilpotent et préciser son ordre de nilpotence, et l'endomorphisme induit par u sur I_p est un automorphisme de I_p .

Exercice 4. **

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, p_i désigne un projecteur de E .

On suppose que pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2 : i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.

Montrer que la somme $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_n)$ est directe.

Exercice 5. *

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\text{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.
3. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f))$.

Exercice 6. *

Soit E de dimension finie. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** s'il existe $p \geq 1$ tel que :

$$f^p = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

L'entier p s'appelle alors l'**indice de nilpotence de f** .

On suppose dans la suite que f est un endomorphisme nilpotent d'indice p .

1. (a) f peut-il être bijectif?
- (b) Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
- (c) En déduire que $f^n = 0$.
2. On suppose dans cette question que $p = n$. Déterminer le rang de f .
3. Montrer que $Id_E - f$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 7.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $p((x, y)) = (9x - 12y, 6x + 8y)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une base de $\ker(p)$ et de $\text{Im}(p)$. p est-elle injective? bijective?
3. Montrer que p est un projecteur.
4. Les sous-espaces $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8. **[Oral ESCP 2019]

Soient deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 2$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ des endomorphismes de E tous non nuls et tels que :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = Id_E \text{ et } \text{rg}(p_1) + \text{rg}(p_2) + \dots + \text{rg}(p_k) \leq n.$$

1. Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$.
2. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'endomorphisme p_i est un projecteur de E , et que pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ vérifiant $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
3. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, p_i est le projecteur sur $\text{Im}(p_i)$ parallèlement à $K_i = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{Im}(p_j)$.

Exercice 9.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on donne $f_1 = (1, 1, 2, 1)$, $f_2 = (1, -1, 0, 1)$, $f_3 = (0, 0, -1, 1)$ et $f_4 = (1, 2, 2, 0)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. (a) Ecrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ dans $\mathcal{B}$.
- (b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$2. (a) \text{ On pose } Q = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } PQ \text{ puis déterminer } P^{-1}.$$

- (b) En déduire les coordonnées du vecteur $x = (-1, 1, 1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 10.

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M .

On considère les vecteurs $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Donner la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et déterminer son inverse.
- Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de a, b et c .
- Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathcal{B}$.
- En déduire T^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. *

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[x]$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (x^2 - 1)P' - 2xP$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.
- On pose $P_1 = (x + 1)^2$, $P_2 = x^2 - 1$, $P_3 = (x - 1)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2(x)$ puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
- En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 12.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Ecrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}' = (A, B, C, D)$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- On considère $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
(a) Déterminer P^{-1} .
(b) En déduire les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}'$.
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(M) = AM - MA$.
(a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 13. **

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 14. *** [QSP HEC 2021]

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15.

Dans cet exercice n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note Tr l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace. On rappelle que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$.
- En déduire la dimension de $\ker(\text{Tr})$.
- Etablir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I)$.

Exercice 16. *[Trace d'un endomorphisme]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E et soit $\mathcal{B}$ une base de E . Montrer que le scalaire $\text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(f))$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.
Ce scalaire est appelé la **trace de f** et noté $\text{Tr}(f)$.
2. Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et considérons l'application $u_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $u_A(M) = AM$.
(a) Montrer que u_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Calculer $\text{Tr}(u_A)$.
3. Soit p un projecteur de E . Montrer que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Exercice 17.

Déterminer un polynôme annulateur et l'inverse s'il existe des endomorphismes : $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^t A + 2A \end{matrix}$

$g : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \varphi(x)u + x \end{matrix}$ où E est un espace vectoriel, $u \in E$ et φ est une forme linéaire telle que $\varphi(u) = 1$.

Exercice 18.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $2f^2 - 3f - 9Id_E = 0$.

On pose $u = 2f + 3Id_E$ et $v = f - 3Id_E$.

1. Calculer $u - 2v$. En déduire que $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
2. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$ et $\text{Im}(v) \subset \ker(u)$.
3. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$.

Exercice 19.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f \circ f = -Id_{\mathbb{R}^4}$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(u, f(u))$ est stable par f .
3. On pose $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = (0, 1, 0, 0)$ et $e_4 = f(e_3)$.
Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer la matrice M' de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.