

Devoir maison 2 pour le

Exercice 1 (Ecricome 2020).

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geq 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n \geq 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{0,n} = u_n$

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

- (a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On se place désormais sous cette condition.

- (b) Pour tout entier $k \geq 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

Soit $k \geq 2$,

Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $t \geq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt$$

C'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} (k+1 - k)$$

ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leq k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{k^\alpha}$
Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^\alpha} dt$$

C'est-à-dire

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \geq \frac{1}{k^\alpha}$$

Finalement on a bien

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt}$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Soit $n \geq 1$, on sait que les intégrales $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont des intégrales de Riemann convergentes.

D'après la relation de Chasles, on en déduit que les séries $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ convergent et que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

En sommant les relations obtenues à la question précédente, on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}}$$

(d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

D'après la relation précédente, on a, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq 1$$

C'est-à-dire

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leq \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leq 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 1$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} = 1$$

C'est-à-dire

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

- (e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α , la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $R_{1,n} > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries de terme général respectifs $R_{1,n}$ et $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ sont de même nature.

La série de terme général $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, i.e. $\alpha > 2$.

Ainsi

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$

- (f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

On a vu que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$ et qu'elle à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.

On conjecture alors qu'elle converge à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha > p$.

En d'autres termes, on conjecture que

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à tous les ordres p tels que $p < \alpha$.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$.

- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

- (b) Montrer que, pour tout $k \geq 3$, $u_k \leq \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

Soit $k \geq 3$, on a alors $k \ln(k) \geq k \ln(3)$, d'où $k^k \geq 3^k$ et ainsi

$$\forall k \geq 3, \quad 0 \leq u_k \leq \frac{1}{3^k}$$

Les séries de terme général respectifs u_k et $\frac{1}{3^k}$ convergent. En sommant les inégalités obtenus on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+n+1}} && \text{On pose le changement de variable } i = k - n - 1 \\
 &= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
 &= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{3}{2} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 3^n}
 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$0 \leq R_{1,n} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

- (c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre 2.

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{4 \cdot 3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{2,n} \leq \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

- (d) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

On va procéder par récurrence sur p .

Plus précisément notons $\mathcal{A}(p)$ l'assertion

« La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$ »

On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^p} \frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les

séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre $p + 1$.

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \frac{1}{3^k}$$

Or $\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p} \frac{1}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2^{p+1} 3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p+1,n} \leq \frac{1}{2^{p+1} 3^n}$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

En conclusion

Pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge à l'ordre p et

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq R_{p,n} \leq \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

- (e) La série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

D'après la question précédente on a, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{2^n 3^n}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq R_{n,n} \leq \frac{1}{6^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

la série $\sum_{n \geq 1} R_{n,n}$ converge.

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

- (a) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

Pour $t \in [0, 1]$ on a $1+t \geq 1$ ainsi

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

D'où, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

C'est-à-dire

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N u_n &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 t^n dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^N (-1)^n t^n dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{N+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^N u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geq 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

On sait, d'après la question 3.(a) que la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t} dt \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi, d'après la question 3.(b) la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$.

En d'autres termes $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned} R_{1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right) \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt}$$

- (d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geq 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$$

Pour $p \geq 1$, on définit l'assertion $\mathcal{A}(p)$

« La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} dt$ »

La question précédente nous assure que l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vérifiée.

Soit $p \geq 1$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vérifiée.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n R_{p,k} &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^n (-t)^k dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} dt + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \end{aligned}$$

Pour $t \in [0, 1]$ on a $1+t \geq 1$ ainsi $(1+t)^p \geq 1$ et donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} \leq t^{n+1+p}$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \leq \frac{1}{n+p+2}$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt = 0$

On en déduit donc que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
 R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^n R_{p,k} \\
 &= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p + 1} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt \right) \\
 &= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt
 \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$ et que, pour tout $n \geq 0$,

$R_{p+1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}} dt$. En d'autres termes on a prouvé l'assertion $\mathcal{A}(p+1)$.

Par principe de récurrence, on en conclut alors que

Pour tout entier p , la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geq 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^{p+1}} dt$