

Chapitre 8

Dénombrement et introduction aux probabilités

1 Cardinal d'un ensemble

1.1 Ensembles équipotents

Définition 1.1.1. Deux ensembles E et F sont **équipotents** si et seulement si il existe une bijection de E dans F .

Exemple 1.1.1. Démontrer que les ensembles des entiers naturels pairs et impairs sont équipotents.

1.2 Définition du cardinal

Définition 1.2.1. Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent au segment $I_n = [1, n]$.

Proposition 1.2.1. L'entier n est unique et s'appelle le **cardinal de E** .

Notation 1.2.2. On note $\text{Card}(E)$ le cardinal d'un ensemble E .

Exemple 1.2.1. Donner le cardinal de l'ensemble $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

1.3 Opérations sur les cardinaux

Notation 1.3.1. Rappelons que $A \times B$ désigne le produit cartésien des ensembles A et B et que B^A désigne l'ensemble des applications de A dans B .

Théorème 1.3.1. Soient A et B des ensembles finis. On a les formules suivantes :

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$
2. $\text{Card}\overline{A} = \text{Card}E - \text{Card}A$
3. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B$
4. $\text{Card}(B^A) = (\text{Card}B)^{\text{Card}A}$

Exemple 1.3.1. Calculer les cardinaux des ensembles suivants.

1. $\{1; 3; 5\} \cup \{2; 3; 6\}$
2. $E = \llbracket 1; 10 \rrbracket$ et $A = \{1; 2; 3; 4\} : \bar{A}$
3. $\{f : \llbracket 1; 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 2; 5 \rrbracket\}$
4. $\{(x; y), x \in \{1; 4\}, y \in \llbracket 3; 6 \rrbracket\}$

2 Que faire avec une urne contenant n boules ?

2.1 Quelles situations peuvent être décrites en termes de dénombrement ?

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n .

- On pioche une boule au hasard, on note son numéro, on la remet dans l'urne et on recommence l'opération p fois. Il s'agit de **p tirages successifs avec remise**, on obtient une **p -liste** d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- On pioche une boule au hasard, on note son numéro, on ne la remet pas dans l'urne et on recommence l'opération p fois. Il s'agit de **p tirages successifs sans remise**, on obtient un **p -arrangement** d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- On pioche d'une seul coup p boules. Il s'agit d'un **tirage simultané**, on obtient une **p -combinaison** d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

2.2 Nombre de listes

Définition 2.2.1. Une **p -liste d'éléments de E** est une application de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans E , ou une suite de p éléments de E .

Exemple 2.2.1. Soit $E = \llbracket 1; 10 \rrbracket$. Donner deux exemples de 4-listes de E .

Proposition 2.2.1. Si $\text{Card}E = n$, le nombre de p -listes d'éléments de E est n^p .

Démonstration.

□

Exemple 2.2.2. On considère une urne contenant des boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10. On tire 4 boules successivement, avec remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

2.3 Nombre d'arrangements

Définition 2.3.1. Un **arrangement de p éléments de E** est une injection de $[[1, p]]$ dans E , ou une p -liste d'éléments distincts

Exemple 2.3.1. Soit $E = [[1; 10]]$. Donner deux exemples d'arrangements de 4 éléments de E .

Théorème 2.3.1. On note A_n^p le **nombre d'injections de $[[1, p]]$ dans $[[1, n]]$** . On a alors :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration.

□

Exemple 2.3.2.

1. Déterminer le nombre de bijections de $[1, n]$ dans lui-même.
2. Démontrer sans calculs que $n! \leq n^n$.

2.4 Permutations

Définition 2.4.1. Soit E un ensemble fini. Une **permutation** des éléments de E est un réarrangement des éléments de E .

Exemple 2.4.1.

Donner une permutation de $E = [1; 4]$.

Avec l'exemple 2.3.2, on vient de prouver la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. Soit E un ensemble fini. Le **nombre de permutations** des éléments de E est

$\text{Card}(E)!$

Exemple 2.4.2.

Donner le nombre de manières de distribuer un carambar, un malabar, un caramel et un arlequin entre 4 enfants.

2.5 Nombre de combinaisons

Définition 2.5.1. Une **combinaison de p éléments de E** est une partie de E à p éléments.

Théorème 2.5.1. Si on note $\binom{n}{p}$ le **nombre de combinaisons à p éléments de $[1, n]$** , on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Démonstration.

□

Exemple 2.5.1. Un jeu de 7 familles contient 6 personnages par famille. On choisit une famille. Combien de mains différentes de 3 cartes de cette famille peut-on obtenir ?

3 Nombre de parties d'un ensemble

Proposition 3.0.1. Soit E un ensemble fini. On a

$$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card} E}$$

Démonstration.

□

Exemple 3.0.1. Déterminer le nombre de tirages différents sans remise que l'on peut faire dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.

4 Mise en application

Exemple d'application 4.0.1. On lance simultanément trois dés cubiques identiques dont les faces sont marquées de 1 à 6. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

5 Propriétés des combinaisons

Proposition 5.0.1. On a les résultats suivants :

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$
5. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
6. $\frac{p}{n} \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1}$ ou encore $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$

Démonstration.

Exemple 5.0.1. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

6 Introduction aux probabilités

6.1 Observation d'une expérience aléatoire

Il s'agit ici de quantifier le hasard. Empiriquement, on calcule la fréquence d'apparition d'un événement au cours de la répétition de la même expérience. Le nombre obtenu est un réel de $[0, 1]$, et c'est ce que l'on va appeler la probabilité de l'évènement.

Définition 6.1.1. On lance un dé à six faces et on note le numéro de la face supérieure. Cette expérience est une **expérience aléatoire** dont les **résultats** possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Un **évènement** est un ensemble de résultats, par exemple “obtenir un nombre pair”. On note Ω l'univers, c'est-à-dire l'ensemble des résultats observables : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque 6.1.1. L'évènement impossible est noté $\emptyset$ et l'évènement sûr correspond à Ω .

Définition 6.1.2. Étant donné deux évènements A et B , on définit de nouveaux évènements :

- $\bar{A}$ se lit “**non A**”, c'est l'évènement contraire de A .
- $A \cap B$ se lit “**A et B**”, c'est la conjonction des évènements A et B : elle se produit si les évènements A et B sont réalisés tous les deux.
- $A \cup B$ se lit “**A ou B**”, c'est la disjonction des évènements A et B : elle est vraie dès lors que l'un des évènements A ou B (ou les deux) est réalisé.

Exemple 6.1.1. On lance un dé à six faces. On note A l'évènement “Obtenir un résultat supérieur à 3” et B “Obtenir un résultat pair”.

1. Quels résultats correspondent à A ?
2. Quels résultats correspondent à B ?
3. Quels résultats correspondent à $\bar{A}$?
4. Quels résultats correspondent à $A \cap B$?
5. Quels résultats correspondent à $A \cup B$?

Définition 6.1.3. Deux évènements sont dits **disjoints** s'ils ne peuvent être réalisés en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 6.1.4. Une famille $(A_i)_{i \in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, est un **système complet d'évènements** (ou partition de l'univers) si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. les évènements sont deux à deux disjoints : $\forall (i, j) \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,
2. les évènements recouvrent Ω : $\cup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemple 6.1.2. Donner un système complet à 3 évènements pour l'univers correspondant au lancer de dé à 6 faces.

6.2 Probabilité

Définition 6.2.1. Une **probabilité** sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\cup_{n \in I} A_n) = \sum_{n \in I} P(A_n)$ où $\cup_{n \in I} A_n$ désigne une réunion d'évènements disjoints 2 à 2.

Exemple 6.2.1. Donner une probabilité sur $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Définition 6.2.2. Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** si $P(A \cap B) = 0$.

Proposition 6.2.1. Pour tout couple d'évènements (A, B) , on a :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Corollaire 6.2.2. Soient A et B deux évènements tels que $A \subset B$, alors on a $P(A) \leq P(B)$.

Démonstration.

□

Proposition 6.2.3 (Formule du crible ou de Poincaré).

Soient $A_1, \dots, A_n$ une famille d'évènements. On a :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Exemple 6.2.2. 1. Donner la formule du crible dans le cas de 2 évènements A et B .

2. Donner la formule du crible dans le cas de 3 évènements A , B et C .

Théorème 6.2.4. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, une probabilité est entièrement déterminée par la donnée de $p_i = P(\omega_i)$ pour tout i , à condition que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Exemple 6.2.3. Reprendre l'exemple 6.2.1 et constater que c'est bien ainsi qu'on a défini une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Proposition 6.2.5. Un cas particulier important est celui de l'**équiprobabilité**, dans lequel tous les évènements élémentaires ont autant de chance de se produire :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}}$$

Exemple 6.2.4. Donner la probabilité associée à un dé à 6 faces équilibré.

6.3 Probabilité conditionnelle

Définition 6.3.1. Soit A un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement B on note :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$$

qui est la **probabilité conditionnelle de B sachant A** .

Exemple 6.3.1. Ordralphabetix est un poissonnier et 12% du poisson qu'il vend est pêché par ses soins, 28% vient d'un grossiste armoricain et le reste vient d'un grossiste de Lutèce.

Il a remarqué que parmi les clients qui ont acheté du poisson qu'il a lui-même pêché 10% sont mécontents du poisson. De plus, 7% du total de ses clients sont mécontents du poisson provenant du grossiste armoricain. Par contre il n'est pas sûr de ce que pensent ses clients du poisson provenant du grossiste de Lutèce.

Un client achète un poisson à Ordralphabetix. On considère les évènements suivants :

- O : « Le poisson a été pêché par Ordralphabetix »
- A : « Le poisson provient du grossiste armoricain »
- L : « Le poisson provient du grossiste de Lutèce »
- M : « Le client est mécontent du poisson »

1. Représenter les données de l'énoncé dans un arbre de probabilité.
2. Parmi les clients ayant acheté du poisson provenant du grossiste armoricain, quel est le pourcentage de clients mécontents.

Théorème 6.3.1. P_A est une probabilité :

1. $P_A(\Omega) = 1$
2. $P_A\left(\bigcup_{n \in I} B_n\right) = \sum_{n \in I} P_A(B_n)$ où $\bigcup_{n \in I} B_n$ désigne une réunion d'événements incompatibles.

Théorème 6.3.2 (Probabilités composées).

Soient A et B deux événements :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Exemple 6.3.2. On se place dans le contexte de l'exemple 6.3.1. Calculer la probabilité de l'événement $O \cap M$.

Théorème 6.3.3 (Probabilités totales).

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un **système complet** d'événements de probabilités non nulles. On a

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B)P(A_k)$$

Exemple 6.3.3. On se place dans le contexte de l'exemple 6.3.1. Ordralphabetix apprend lors du conseil du village que 52% des villageois sont mécontents des poissons qu'ils lui achètent. Calculer la

probabilité qu'un client soit mécontent en sachant qu'il a acheté un poisson provenant du grossiste de Lutèce.

Exemple 6.3.4. Une compagnie d'assurances estime que les gens peuvent être classé en deux catégories : ceux qui ont plus de deux accidents de voiture par an et les autres. Elle estime que la première catégorie représente 30% de la population. Par ailleurs, des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu de la première catégorie d'avoir un accident dans l'année est de 0,4, alors qu'elle est de 0,2 pour un individu dans la deuxième catégorie. Quelle est la probabilité qu'un nouveau client de cette compagnie ait un accident durant l'année qui suit la signature du contrat ?

Théorème 6.3.4 (Formule de Bayes). Soient A et B de probabilité non nulle. On a

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$$

Démonstration.

□

Exemple 6.3.5. Toujours dans le contexte de l'exemple 6.3.1, un client est mécontent du poisson qu'il vient d'acheter. Quelle est la probabilité que ce poisson provienne du grossiste de Lutèce ?

Corollaire 6.3.5. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un **système complet** d'évènements, on a :

$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P_{A_i}(B)P(A_i)} P_{A_k}(B)$$

6.4 Indépendance en probabilités

Définition 6.4.1. Deux événements sont **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque 6.4.1.

- Cette définition est équivalente à $P_A(B) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants, alors il en est de même de $\bar{A}$ et B ou de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Exemple 6.4.1. On se place dans le contexte de l'exemple 6.3.1. Les événements « Le poisson provient du grossiste de Lutèce » et « Le client est mécontent du poisson » sont-ils indépendants ?

Exemple 6.4.2. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$.

On définit sur Ω deux probabilités :

- P_1 telle que $P_1(\{a\}) = \frac{1}{4}$, $P_1(\{b\}) = \frac{1}{4}$, $P_1(\{c\}) = \frac{1}{4}$ et $P_1(\{d\}) = \frac{1}{4}$,
- P_2 telle que $P_2(\{a\}) = \frac{1}{4}$, $P_2(\{b\}) = \frac{1}{4}$, $P_2(\{c\}) = \frac{3}{8}$ et $P_2(\{d\}) = \frac{1}{8}$.

On note $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c\}$.

1. On se place dans l'espace probabilisé (Ω, P_1) . Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. On se place dans l'espace probabilisé (Ω, P_2) . Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Définition 6.4.2. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille de n évènements. Ils sont **deux à deux indépendants** si

$$\forall i \neq j, A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants.}$$

Définition 6.4.3. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille de n évènements. Ils sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \subset [1; n], P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Remarque 6.4.2. Si des événements sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.

Attention : La réciproque est fausse.

Exemple 6.4.3. On lance deux fois de suite un dé équilibré. On définit les événements suivants :

- A : “Le premier lancer donne un résultat impair”
- B : “Le deuxième lancer donne un résultat impair”
- C : “La somme des deux résultats est impaire”.

Prouver que les événements A , B et C sont deux à deux indépendants mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants.