

Exercice 16

Partie I :

1) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ $X(\Omega) = \{0, n\}$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tp)^k q^{n-k} = (tp + q)^n \end{aligned}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, n\})$ $X(\Omega) = \{0, n\}$ $P(X=k) = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} t^k \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{n+1} \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \end{aligned}$$

2) X étant une variable finie t^X admet une espérance par le thm de transfert et

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k P(X=k) = G(t).$$

3) G est dérivable comme somme de fct qui le sont et

$$G'(t) = \sum_{k=0}^n P(X=k) \times k t^{k-1}$$

$$\text{Donc } G'(1) = \sum_{k=0}^n k P(X=k) = E(X)$$

Rq si on applique cela à $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

$$E(X) = G'(1)$$

$$G'(t) = np(pt+q)^{n-1}$$

$$G'(1) = np(p+q)^{n-1} = np.$$

Par la formule de König-Huygens :

(2)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$\theta_n \quad G''(H) = \sum_{k=0}^n k(k-1) t^{k-2} P(X=k)$$

$$\text{Donc } G''(1) = \sum_{k=0}^n (k^2 - k) P(X=k) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

$$\text{Donc } E(X^2) = G''(1) + E(X) = G''(1) + G'(1).$$

$$\text{Ainsi } V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

4) G est de classe $\tilde{C}^\infty$ comme somme de fct qui le sont.

$$\begin{aligned} \text{et } G^{(i)}(t) &= \sum_{k=0}^n k(k-1)\dots(k-i+1) t^{k-i} P(X=k) \\ &= \sum_{k=i}^n k(k-1)\dots(k-i+1) t^{k-i} P(X=k) \end{aligned}$$

les autres termes sont nuls.

$k=0$ pour $k=0$
 $k-1=0$ pour $k=1$
 $k-2=0$ pour $k=2$
 $\vdots$
 $k-i+1=0$ pour $k=i-1$

$$\text{Donc } G^{(i)}(0) = \sum_{k=i}^n k(k-1)\dots(k-i+1) 0^{k-i} P(X=k)$$

$$= i(i-1)\dots 1 \cdot 0^0 P(X=i) + \underbrace{\sum_{k=i+1}^n k(k-1)\dots(k-i+1) 0^{k-i} P(X=k)}_{=0}$$

$$= i! P(X=i)$$

$$\text{Donc } P(X=i) = \frac{G^{(i)}(0)}{i!}$$

Ex 16

Partie II.

1) Soit $t \in (-1; 1]$

$$|P(X=k) t^k| = P(X=k) |t|^k \leq P(X=k)$$

Or, comme $\{X=k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une s.c.e., $\sum_{k \geq 0} P(X=k)$ cvge (sa somme vaut 1)
des séries à termes positifs.

Donc par critère de comparaison $\sum_{k \geq 0} P(X=k) t^k$ cvge absolument

2) Si $X \hookrightarrow P(\lambda)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}$ $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$\text{Donc } G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $P(X=k) = q^{k-1} p$ ($P(X=0) = 0$)

$$\text{Donc } G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p t^k = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{+\infty} (qt)^{k-1} = \frac{p}{q} \left(\frac{1}{1-qt} - 1 \right)$$

$$= \frac{pqt}{q(1-qt)} = \frac{pt}{1-qt}$$

3) Par le thm de transfert t^X admet une espérance $\Leftrightarrow \sum t^k P(X=k)$ cvge absolue

Ce qui est le cas d'après la question 1.

$$\text{Donc } E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X=k) = G(t)$$

$$4/a) \frac{G(t) - G(1)}{t-1} = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)}{t-1} \quad (4)$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) (t^k - 1)}{t-1}$$

par linéarité
car les séries
convergent.

$$= \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) (t^k - 1)}{t-1}$$

terme en $k=0$
vaut 0

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(X=k) \times (t-1) \left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i \right)}{t-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(P(X=k) \left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) \right) \quad \square$$

$$(a^n - b^n) = (a-b) \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} \right)$$

b) Si $1 < t' \geq t > 1$

$$t'^i \geq t^i \quad \forall i \in [0; k-1]$$

$$\text{Donc } \sum_{i=0}^{k-1} t'^i \geq \sum_{i=0}^{k-1} t^i$$

$$\text{Donc } P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t'^i \geq P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Donc comme les séries convergent.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t'^i \geq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i$$

$$\text{Donc } \frac{G(t') - G(1)}{t'-1} \geq \frac{G(t) - G(1)}{t-1}$$

$$t \mapsto \frac{G(t) - G(1)}{t-1} \text{ est croissante.}$$

Ex 16

Ex 16 (5)

Partie II:

4) b) De plus si $t \in]-1, 1[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=0}^{k-1} t^i \leq \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k.$$

$$\text{Donc } P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \leq k P(X=k)$$

$$\text{Alors } \frac{G(t) - G(-1)}{t - (-1)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X=k) = E(X). \quad (\text{fini car } X \text{ admet une espérance})$$

Donc $t \mapsto \frac{G(t) - G(-1)}{t - (-1)}$ est croissante majorée par $E(X)$

Ainsi par le thm de convergence monotone $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{G(t) - G(-1)}{t - (-1)}$ existe

et $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{G(t) - G(-1)}{t - (-1)} \leq E(X)$. Donc G est dérivable en 1 et

$$G'(1) \leq E(X).$$

c) ~~Soit~~ Soit $t \in [0, 1]$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \geq 0.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n \left(P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) = \frac{G(t) - G(-1)}{t - (-1)}.$$

Donc en passant à la limite quand $t \rightarrow 1$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \leq \lim_{t \rightarrow 1} \frac{G(t) - G(-1)}{t - (-1)}$$

(car $\sum_{k=1}^n$ finies)

$$\text{Soit } \sum_{k=1}^n P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} 1 \leq G'(1)$$

Ainsi $G'(1) \geq \sum_{k=1}^n P(X=k) \times k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ex 6 6

Donc $G'(1) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(X=k) \times k = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times k$

Soit $G'(1) \geq E(X)$

On en a vu en 4. b que $G'(1) \leq E(X)$

Finalement $G'(1) = E(X)$

5) Par la majoration de l'exercice 5, on a :

$$\sum_{k=1}^n P(X=k) \left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) \leq \frac{G(t) - G(1)}{t-1}$$

G étant dérivable en 1, on peut appliquer la limite $t \rightarrow 1$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n P(X=k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \leq G'(1)$$

$$\text{Soit } \sum_{k=1}^n P(X=k) \times k \leq G'(1)$$

~~On~~ On $S_n = \sum_{k=1}^n P(X=k) \times k$ est la somme partielle de la

série $\sum_{k \geq 1} P(X=k) \times k$.

X admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{k \geq 1} P(X=k) \times k$ cvge abs

$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 1} P(X=k) \times k$ cvge car termes positifs

$\Leftrightarrow (S_n)$ cvge

On (S_n) est $\nearrow$ (car les termes sont ≥ 0) et (S_n) majorée par $G'(1)$

Donc (S_n) cvge. Donc X admet une espérance et par la q4. $G'(1) = E(X)$