

# Chapitre 5

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans tout ce chapitre :

- $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  ;
- $f$  est un endomorphisme de  $E$  ;
- $A$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) à coefficients réels.

**Motivation :** On souhaite trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est "la plus simple possible" pour faciliter les calculs. Nous verrons dans ce chapitre sous quelles conditions on peut obtenir une matrice diagonale et comment l'obtenir. D'un point de vue matriciel, cela correspond à étudier les conditions sur  $A$  pour obtenir une matrice diagonale semblable à  $A$ , et déterminer la matrice de passage correspondante.

### 1 Valeurs propres, Vecteurs propres

#### 1.1 Définitions

##### 1.1.1 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme

Partons de notre objectif en supposant que la matrice de  $f$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est diagonale :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & e_1 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & e_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & e_n \end{pmatrix}$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i)$  est égal à  $\lambda_i e_i$  avec  $e_i \neq 0_E$  (car c'est un vecteur d'une famille libre). Ceci conduit à la notion d'**éléments propres** que l'on développe ici.

**Définition 1.1.1.**

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre de  $f$**  lorsque :

$$\exists u \in E \setminus \{0_E\}, f(u) = \lambda u.$$

- On dit alors qu'un vecteur non nul  $u \in E$  est un **vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$**  si :

$$f(u) = \lambda u.$$

- On appelle **spectre de  $f$** , et on note  $\text{Sp}(f)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .

**Exemple 1.1.1.**

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que  $u = (1, 0, 1)$  est un vecteur propre de  $f$  et déterminer la valeur propre  $\lambda$  associée.

**Remarque 1.1.1.**

Pour tout  $u \in E$  :

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda Id_E)(u) = 0_E \Leftrightarrow u \in \ker(f - \lambda Id_E).$$

**Définition 1.1.2.**

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ , on appelle **sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$** , et on note  $E_\lambda(f)$ , le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par :

$$E_\lambda(f) = \{u \in E / f(u) = \lambda u\} = \ker(f - \lambda Id_E).$$

$E_\lambda(f)$  est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$  et du vecteur nul  $0_E$ .

**Exemple 1.1.2.**

Déterminer  $E_\lambda(f)$  dans l'exemple précédent.

**Remarque 1.1.2.**

Supposons  $E$  de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists u \neq 0_E, f(u) = \lambda u \\ &\Leftrightarrow \exists u \neq 0_E, u \in \ker(f - \lambda Id_E) \\ &\Leftrightarrow \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(f - \lambda Id_E)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda Id_E) = \dim(E) - \dim(\ker(f - \lambda Id_E)) < n \quad \text{par le thm du rang} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ n'est pas bijective.} \end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 1.1.1** (Caractérisation des valeurs propres pour un endomorphisme).

On dispose des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(f) &\Leftrightarrow \dim(\ker(f - \lambda Id_E)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(f - \lambda Id_E) < n \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ n'est pas bijective.} \end{aligned}$$

De plus,  $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f - \lambda Id_E)$ .

**Exemple 1.1.3.**

On considère toujours l'endomorphisme de l'ex ??.

Montrer que 1 est valeur propre de  $f$  et déterminer le sous-espace propre associé.

**Corollaire 1.1.2** (Cas particulier : la valeur propre 0).

On a l'équivalence :

$$0 \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f \text{ n'est pas bijective.}$$

De plus  $\dim(E_0(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f)$ .

**1.1.2 Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée**

On définit les éléments propres d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  comme étant ceux de l'endomorphisme canoniquement associé :  $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$

**Définition 1.1.3.**

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre de  $A$**  lorsque :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, AX = \lambda X.$$

- On dit qu'un vecteur colonne non nul  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est un **vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$**  si :

$$AX = \lambda X.$$

- On appelle **spectre de  $A$**  et on note  $\text{Sp}(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

**Remarque 1.1.3.**

En Python, la commande `al.eig(A)` de la bibliothèque `numpy.linalg` permet d'obtenir le spectre d'une matrice  $A$ .

**Définition 1.1.4.**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . On appelle **sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$** , et on note  $E_\lambda(A)$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\} = \ker(A - \lambda I_n).$$

$E_\lambda(A)$  est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$  et du vecteur nul  $0_{n,1}$ .

**Proposition 1.1.3** (Lien endomorphisme/matrices).

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , et  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$u \in \ker(f - \lambda \text{Id}_E) \Leftrightarrow X = M_{\mathcal{B}}(u) \in \ker(A - \lambda I_n).$$

En particulier,  $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$  et  $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_\lambda(A))$  pour toute valeur propre  $\lambda$ .

**Corollaire 1.1.4.**

Deux matrices semblables  $A$  et  $A'$  ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

**Remarque 1.1.4.**

ATTENTION : il n'y a pas de réciproque : deux matrices ayant les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension ne sont pas forcément semblables.

Tous les énoncés concernant les endomorphismes sont vrais en particulier pour l'endomorphisme  $\varphi_A$ . Ils peuvent donc être reformulés pour une matrice  $A$ .

**Théorème 1.1.5** (Caractérisation des valeurs propres pour une matrice).

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow \dim(\ker(A - \lambda I_n)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\end{aligned}$$

De plus,  $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ .

**Corollaire 1.1.6** (Cas particulier : la valeur propre 0).

On a les équivalences :

$$0 \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \text{rg}(A) < n \Leftrightarrow A \text{ n'est pas inversible.}$$

De plus  $\dim(E_0(A)) = n - \text{rg}(A)$ .

**Proposition 1.1.7.**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  et  ${}^tA$  ont les mêmes valeurs propres, et  $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

*Démonstration.*

□

**Remarque 1.1.5.**

ATTENTION : en revanche, les sous-espaces propres de  $A$  et  ${}^tA$  n'ont aucune raison d'être égaux : un vecteur  $X$  vérifiant  $AX = \lambda X$  ne satisfera pas nécessairement  ${}^tAX = \lambda X$ .

## 1.2 Recherche d'éléments propres

Vocabulaire : Déterminer les **éléments propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice, c'est déterminer :

- toutes ses valeurs propres ;
- le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (souvent en donnant une base de ce sous-espace vectoriel).

### 1.2.1 Cas des matrices $2 \times 2$

**Proposition 1.2.1** (Cas des matrices  $2 \times 2$ ).

Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda \text{ est racine de } x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A).$$

*Démonstration.*

□

### Exemple 1.2.1.

Déterminer les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$ .

### 1.2.2 Cas des matrices triangulaires

**Proposition 1.2.2.**

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

*Démonstration.*

□

**Exemple 1.2.2.**

Les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  sont  $-3, 0$  et  $2$ .

**Proposition 1.2.3.**

Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur de rang  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Alors, le spectre de  $p$  est  $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$ .

*Démonstration.*

□

**1.2.3 Utilisation d'un polynôme annulateur****Proposition 1.2.4.**

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , et  $u \in E_\lambda(f)$ . Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[x]$  :

$$P(f)(u) = P(\lambda)u.$$

*Démonstration.*

□

**Corollaire 1.2.5.**

Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme annulateur de  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ). Alors les valeurs propres de  $f$  (resp.  $A$ ) sont parmi les racines de  $P$ .

*Démonstration.*

□

**Remarque 1.2.1.**

ATTENTION : il n'y a pas de réciproque : une racine de  $P$  n'est pas forcément une valeur propre de  $f$  (ou  $A$ ).

Par exemple  $x(x-1)$  est un polynôme annulateur de  $I_n$ , donc les valeurs propres possibles de  $I_n$  sont 0 et 1. Or  $I_n$  est triangulaire (car diagonale) avec uniquement des 1 sur sa diagonale donc sa seule valeur propre est 1.

**Exemple 1.2.3.**

1. Soit  $E$  un espace de dimension finie  $n$ , et soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur de rang  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , sur  $f$  parallèlement à  $G$ .

(a) Déterminer un polynôme annulateur de  $p$  de degré 2.

(b) Quelles sont les valeurs propres possibles pour  $p$ ?

(c) Vérifier que ce sont bien des valeurs propres de  $p$ .

2. Déterminer les valeurs propres de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  nilpotent d'indice  $k \in \mathbb{N}^*$  (c'est-à-dire tel que  $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ ).

### 1.2.4 Recherche des valeurs propres "à vue"

**Méthode 1.1** (Recherche de valeurs propres "à vue").

On peut tenter de trouver directement, lorsque cela est facile :

- soit un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tel que  $A - \lambda I_n$  est de rang  $< n$  ;
- soit une matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nulle qui satisfait  $AX = \lambda X$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On pourra tester notamment  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  lorsque la somme des coefficients de chaque ligne de  $A$  est identique.

Si l'un de ces points est satisfait,  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ .

**Exemple 1.2.4.**

Donner trois valeurs propres de  $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

### 1.2.5 Cas général

**Méthode 1.2** (Recherche des valeurs propres par l'algorithme du pivot de Gauss.).

En dernier recours, et seulement si toutes les méthodes précédentes n'aboutissent pas (ce qui est très rarement le cas), on procèdera comme suit pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  ou d'une matrice  $A$  :

- on écrit la matrice  $A$  de  $f$  dans une base donnée ;
- on calcule  $A - \lambda I_n$  où  $\lambda$  est une indéterminée ;
- on échelonne la matrice  $A - \lambda I_n$  en suivant l'algorithme du pivot de Gauss **sur les lignes**. On respectera pour cela les consignes suivantes :
  - autant que possible, on échangera deux lignes afin de ne plus avoir  $\lambda$  sur la diagonale, sauf sur le dernier coefficient en bas à droite ;
  - si ce n'est pas possible, on sera amené à prendre pour pivot une expression dépendante de  $\lambda$ . Dans ce cas, on poursuit l'algorithme en supposant ce pivot non nul pour ne pas diviser par 0. On indiquera alors à cette étape les valeurs "interdites" ;
- $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si, et seulement si,  $\text{rg}(A - I_n) < n$ , soit si, et seulement si, l'un des pivots est nuls (argument à redonner à chaque fois). On est donc ramené à la résolution d'équations polynomiales.
- On termine en étudiant chaque valeur "interdite" : on reprend les calculs et on regarde si  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$  pour chaque valeur de  $\lambda$  exclue précédemment.

**Exemple 1.2.5.**

Déterminer le spectre des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Méthode 1.3** (Détermination des sous-espaces propres).

On suppose que l'on a déterminé les valeurs propres de  $A$ . Pour déterminer  $E_\lambda(A)$  :

- si on veut seulement sa dimension :  $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$  ;
- pour déterminer explicitement  $E_\lambda(A)$ , on résout le système linéaire  $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$  qui, si l'on a déterminé les valeurs propres de  $A$  par l'algorithme de Gauss, a déjà été échelonné.  $E_\lambda(A)$  est l'ensemble des solutions de ce système.

**Exemple 1.2.6.**

Déterminer les sous-espaces propres et leur dimension des matrices précédentes.

### 1.3 Propriétés générales

#### 1.3.1 Sous-espaces propres stables

##### Proposition 1.3.1.

- Soient  $f$  et  $g$  des endomorphismes de  $E$  qui commutent. Alors tout sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
- Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ . L'endomorphisme induit par  $f$  sur  $E_\lambda(f)$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$  :  $\lambda I_n$ .

*Démonstration.*

□

#### 1.3.2 Somme directe de sous-espaces propres

##### Proposition 1.3.2.

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  des scalaires deux à deux distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$  tel que :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

La famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est appelée **famille des polynômes de Lagrange** associée à  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

*Démonstration.*

□

**Proposition 1.3.3.**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  des valeurs propres deux à deux distinctes de  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors la somme  $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(f)$  est directe.

*Démonstration.*

□

### 1.3.3 Conséquences

**Proposition 1.3.4.**

Une famille de vecteurs propres de  $f$  associée à des valeurs propres distinctes est libre.

*Démonstration.*

□

**Proposition 1.3.5.**

- Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  possède au plus  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes.
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  possède au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

*Démonstration.*

□

**Remarque 1.3.1.**

Il se peut bien évidemment que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède strictement moins de  $n$  valeurs propres. Par exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  possède une seule valeur propre 1.
- $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ne possède aucune valeur propre réelle. En effet

$$\lambda \in \text{Sp}(B) \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Cette équation n'ayant pas de solution réelle, il n'y a pas de valeur propre réelle.

**Proposition 1.3.6.**

L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n = \dim(E).$$

*Démonstration.*

□

**Remarque 1.3.2.**

Il n'y a pas égalité en général. On a vu par exemple que pour  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$  et  $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(A)) = 1$ , et donc :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 < 3.$$

**Exemple 1.3.1.**

Déterminer toutes les valeurs propres et les dimensions de leurs sous-espaces propres associés pour la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Corollaire 1.3.7.**

- Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  possède  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.  
De plus, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.  
De plus il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

*Démonstration.*

□

**Exemple 1.3.2.**

Que peut-on dire de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  ?

## 2 Réduction

### 2.1 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

#### 2.1.1 Définition

**Définition 2.1.1.**

- On dit que  $f$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $M_{\mathcal{B}}(f)$  soit diagonale.
- On dit que  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

**Exemple 2.1.1.**

Montrer que si  $p$  est un projecteur, alors  $p$  est diagonalisable.

**Proposition 2.1.1.**

$f$  est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base  $\mathcal{B}$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Dans ce cas,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  est une matrice diagonale telle que :

- les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $f$  ;
- $\lambda \in \text{Sp}(f)$  apparaît  $\dim(E_{\lambda}(f))$  fois sur la diagonale.

*Démonstration.*

□

**Proposition 2.1.2.**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ . Alors :

$$f \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow A \text{ diagonalisable.}$$

*Démonstration.*

□

**2.1.2 Critères de diagonalisabilité**

**Théorème 2.1.3** (CNS de diagonalisabilité de  $f \in \mathcal{L}(E)$ ).

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- |                                                                  |                                                                 |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1. $f$ est diagonalisable ;                                      | 3. $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_{\lambda}(f)) = n ;$ |
| 2. Il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ ; | 4. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f).$   |

*Démonstration.*

□

En appliquant le résultat précédent à l'endomorphisme  $\varphi_A : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $A$ , on obtient le théorème :

**Théorème 2.1.4** (CNS de diagonalisabilité de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est diagonalisable ;
2. Il existe une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$  ;
3.  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$  ;
4.  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$ .

**Exemple 2.1.2.**

Déterminer si les matrices étudiées à l'exemple ?? sont diagonalisables, et donner (si c'est le cas) une matrice diagonale semblable à ces matrices.

**Proposition 2.1.5** (Condition suffisante de diagonalisabilité).

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

Si  $f$  (resp.  $A$ ) admet  $n = \dim(E)$  valeurs propres distinctes, alors  $f$  (resp.  $A$ ) est diagonalisable. De plus, ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

*Démonstration.*

□

**Remarque 2.1.1.**

Il n'y a pas de réciproque : la matrice  $C$  par exemple admet 2 valeurs propres distinctes et est bien diagonalisable.

**Exemple 2.1.3.**

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

On étudie à présent le cas opposé d'un endomorphisme possédant une seule valeur propre.

**Proposition 2.1.6.**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) admettant une unique valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$f \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow f = Id_E.$$

$$A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow A = \lambda I_n.$$

*Démonstration.*

□

**Exemple 2.1.4.**

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable ?

**Remarque 2.1.2.**

Ainsi une matrice triangulaire n'est pas nécessairement diagonalisable.

**2.1.3 Trace d'une matrice et valeurs propres**

On rappelle que :

- La trace est la somme des termes diagonaux d'une matrice carrée ;
- Si deux matrices sont semblables, alors elles ont la même trace.

**Proposition 2.1.7.**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $A$ , et notons  $m_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

si  $A$  est diagonalisable, alors :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i.$$

*Démonstration.*

**Proposition 2.1.8.**

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Cette proposition sera démontrée plus tard dans l'année.

Application de la trace : Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $n = 2, 3, 4$ , supposons :

- on sait que  $A$  est diagonalisable (par exemple grâce à la proposition précédente)
- on a trouvé  $n - 1$  valeurs propres de  $A$

Alors on peut trouver la dernière valeur propre à l'aide de la trace.

**Exemple 2.1.5.**

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  est diagonalisable, et déterminer une matrice  $D$  diagonale semblable à  $A$ .

**2.1.4 Pratique de la diagonalisation****Méthode 2.1** (Montrer qu'une matrice est diagonalisable).

Pour montrer qu'une matrice  $A$  est diagonalisable, on procèdera de la façon suivante :

- On détermine les valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de  $A$  (en utilisant selon les cas le fait que la matrice soit  $2 \times 2$ , triangulaire, un polynôme annulateur en faisant attention de vérifier que les valeurs sont bien des valeurs propres, en y allant "à vue", la trace s'il n'en manque qu'une, ou en dernier recours un pivot de Gauss) ;
- On détermine la dimension de chaque sous-espace propre (en notant que  $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ ).
- La somme est-elle égale à  $n$  ? Si oui,  $A$  est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.

Si  $A$  est diagonalisable, alors  $A$  est semblable à une matrice  $D$  avec sur sa diagonale les valeurs propres  $\lambda$  de  $A$  apparaissant  $\dim(E_\lambda(A))$  fois.

**Exemple 2.1.6.**

Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable, et donner une matrice  $D$  diagonale semblable à  $A$ .

**Remarque 2.1.3.**

La méthode proposée ne fournit pas la matrice  $P$  inversible telle que  $A = PDP^{-1}$ . Si on souhaite obtenir cette matrice, on procèdera comme suit :

**Méthode 2.2.**

Pour déterminer la matrice  $P$  inversible telle que  $APDP^{-1}$  :

- On détermine une base  $\mathcal{B}_i$  de chacun de ses sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}(A)$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Comme  $A$  est diagonalisable,  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$  et la concaténation de chacune de ces

bases  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

- $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à la base  $\mathcal{B}$ .
- Les valeurs propres de  $A$  sont alors rangées dans le même ordre dans  $D$  que les vecteurs propres correspondants dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Remarque 2.1.4.**

Généralement le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé.

**Exemple 2.1.7.**

Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

### 3 Applications de la diagonalisation

Les applications de la diagonalisation sont nombreuses. On en donne ici plusieurs exemples en algèbre. Nous en verrons également plus tard dans l'année certaines applications en probabilités, ainsi que dans l'étude des fonctions de plusieurs variables.

Aucun de ces exemples n'est à savoir refaire sans indication, mais tous ces thèmes sont susceptibles d'être abordés dans des sujets de concours.

### 3.1 Calcul des puissances d'une matrices diagonalisable

#### Exemple 3.1.1.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.2 Suites récurrentes linéaires

En première année, nous avons étudié les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (ie une relation du type  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ) et appris à déterminer son terme général. Ce résultat peut se généraliser à des suites vérifiant des relations de récurrence plus complexes à l'aide de la diagonalisation.

#### Exemple 3.2.1.

On considère une suite  $(u_n)$  satisfaisant  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 3$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $X_{n+1} = AX_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Montrer que  $A$  est diagonalisable et la diagonaliser. *On ne cherchera pas à calculer  $P$ .*

3. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3.3 Matrices diagonalisables semblables

Montrer que deux matrices sont semblables ou non est un problème difficile. On rappelle que si deux matrices sont semblables, alors elles ont :

- même rang,
- même trace,
- mêmes valeurs propres,
- la dimension des sous-espaces propres correspondants est égale.

Mais la réciproque est fausse en général. On montre ici que c'est cependant vrai dans le cas diagonalisable.

**Proposition 3.3.1.**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices diagonalisables. Alors  $A$  est semblable à  $B$  si, et seulement si,  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

*Démonstration.*

□

**Exemple 3.3.1.**

Montrer que les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont semblables.

### 3.4 Polynôme annulateur et calcul de l'inverse

**Proposition 3.4.1.**

Soit  $A$  une matrice diagonalisable. Alors le polynôme

$$P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (x - \lambda)$$

est annulateur de  $A$ .

*Démonstration.*

□

**Exemple 3.4.1.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Déterminer un polynôme annulateur de  $A$ , et en déduire  $A^{-1}$ .