
TD 5 -Réduction des matrices et des endomorphismes

Exercice 1.

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[x], u(P) = (x^2 + 1)P'' + 2xP'.$$

1. Justifier que u est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que 1 et x sont des vecteurs propres de u . A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
3. Montrer que 6 est une valeur propre de u .
4. u admet-il d'autres valeurs propres ? Déterminer les sous-espaces propres de u .
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par $f(P) = -P''(1) + 2P'(1)(x - 1) - P(1)(x - 1)^2$.

On pose $Q_1 = 1$, $Q_2 = x - 1$ et $Q_3 = \frac{1}{2}(x - 1)^2$.

1. Vérifier que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que 2 et -2 sont des valeurs propres de f et déterminer les dimensions des sous-espaces propres E_2 et E_{-2} associés.
4. L'endomorphisme f peut-il admettre d'autres valeurs propres ?
5. Montrer que $E_2 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}_2[x]$ et déterminer une base de $\mathbb{R}_2[x]$ où la matrice de f est diagonale.

Exercice 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Montrer que $\text{Sp}(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(A) \right\}$, et que pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = E_{1/\lambda}(A^{-1})$.

Exercice 4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $x \in E$, $x \neq 0_E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{Vect}(x) \text{ est stable par } f \Leftrightarrow x \text{ est un vecteur propre de } f$$

Exercice 5. ***[QSP HEC 2014]

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $M =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est un projecteur.
2. Quelles sont les valeurs propres de f ?
3. Combien existe-t-il de droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?
4. Combien existe-t-il de plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f ?

Exercice 6. *[Matrices stochastiques - D'après EML 2010]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AV et en déduire une valeur propre de A .

2. Soit λ une valeur propre de A , et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel

$$\text{que } |x_i| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|.$$

- (a) Montrer que $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

- (b) En déduire que $|\lambda| \leq 1$, et que $\text{sp}(A) \subset [-1, 1]$.

Exercice 7.

Déterminer les éléments propres des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace, mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
2. Calculer $(A - 2I_4)^2$ et $(B - 2I_4)^2$. En déduire que les matrices A et B ne sont pas semblables.

Exercice 9.

Déterminer sans le pivot de Gauss les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. **[Oral HEC 2010]

Soit $n \geq 2$, et soit M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est valeur propre de M_n si, et seulement si a est racine du polynôme

$$P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - X - 1.$$

2. Déterminer alors le sous-espace propre associé à la valeur a .

Exercice 11.

Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 12. *

Soit $n \geq 2$ et soit $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer $\text{Sp}(J_n)$ et la dimension de ses sous-espaces propres.
2. Justifier que J est diagonalisable. On précisera la matrice diagonale.

Exercice 13. *

Soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soit a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par $f(P) = (x - a)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de E . En déduire que f admet $n + 1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
3. En déduire que f est diagonalisable.
4. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k .
 - (a) Déterminer $\deg(P_k)$.
Indication : On identifiera le coefficient dominant dans l'égalité $f(P_k) = \lambda_k P_k$.
 - (b) On note r_k l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k , et Q_k tel que $P_k = (x - a)^{r_k} Q_k$.
 Déterminer r_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k .

Exercice 14. **

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$ et soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 15.

Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16.

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Si oui, les diagonaliser et expliciter la matrice de passage.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. *

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ et une matrice P inversible telle que $J = P\Delta P^{-1}$. On explicitera Δ et P .
2. Ecrire M comme combinaison linéaire de I_n et J . En déduire que M est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale semblable à M .

Exercice 18. *

Soit $e = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F . En déduire la dimension de F .
2. Soit D l'application définie sur F par :

$$\forall f \in F, D(f) = f'$$

où f' désigne la dérivée première de f . Montrer que D est un endomorphisme de F et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Exercice 19. *

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P)(x) = xP'(x+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 20. *

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 21. **

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 22. **[QSP HEC 2016]

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n , diagonalisable et ayant chacune n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si, et seulement si, elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

Exercice 23. **

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur $\Omega, \mathcal{A}, P$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$.

Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 24. **[Oral ESCP 2007]

Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$.
On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée n -ième du produit de P par Q .

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Donner une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Déterminer une CNS sur le polynôme φ pour que φ soit diagonalisable.

Exercice 25.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trouver une relation entre A^2 , A et I_3 .
2. Montrer que A admet une seule valeur propre λ . A est-elle diagonalisable ?

Exercice 26. *

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par $f(A) = {}^t(A)$.

1. Calculer f^2 . En déduire un polynôme annulateur de f et les valeurs propres de f .
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 27. *

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice définie par $a_{i,j} = \frac{i}{j}$.

1. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A , puis que $\text{Sp}(A) \subset \{0, n\}$.
2. Déterminer $\text{rg}(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A , et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Résoudre le système $AX = nX$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 28. *[QSP HEC 2005]

Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe une puissance $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$.
A quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

Exercice 29. **[QSP ESCP 2015]

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, et a, b deux scalaires distincts. On suppose que :

$$(f - aId_E)^3 \circ (f - bId_E) = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } (f - aId_E)^2 \circ (f - bId_E) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Etudier la diagonalisabilité de f .

Exercice 30. ***[Oral ESCP 2011]

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et E un espace vectoriel de dimension n . Soit u un endomorphisme de E . On note id l'endomorphisme identité de E .

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples dans } \mathbb{R}.$$

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que le polynôme $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k)$ est annulateur de u .

On étudie la réciproque. Supposons dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme :

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k)$$

annulateur de u , où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ sont des réels distincts.

2. **Résultat préliminaire.** Soient f et g deux endomorphisme de E . En considérant la restriction de f à $\ker(g \circ f)$, montrer que :

$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker(f) + \dim \ker(g).$$

3. (a) Montrer que $n \leq \sum_{j=1}^k \dim \ker(u - \lambda_j id)$
 (b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. **Applications.**

- (a) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit F un sous-espace stable par u . Montrer que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F est diagonalisable.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 31.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4, & u_1 = 2, & u_2 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire un polynôme annulateur de A , puis montrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe trois réels a, b, c tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + b(-1)^n + c2^n$.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. *

Les matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 33. *[Racine carrée d'une matrice]

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C , alors D est diagonale. En déduire que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.
2. Déterminer l'ensemble des matrices $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.