

Devoir maison 4 pour le 12/10/2026

Exercice 1 (EDHEC 2007).

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = I_4, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par (I, J, K, L) , et Id l'endomorphisme identité de E . On pose $A = J + K$.

1. Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E .
2. (a) Exprimer $J \times K$ et J^2 en fonction de I, J, K et L .

On admettra qu'on a également les égalités suivantes :

$$K \times L = J, \quad L \times J = K \text{ et } K^2 = L^2 = -I.$$

- (b) En déduire que $K \times J = -L$, $L \times K = -J$ et $J \times L = -K$.
- (c) En déduire que E est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que :

$$\forall (M, N) \in E^2, \quad M \times N \in E.$$

3. Calculer A^2 . En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A .
4. On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe :

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$

- (a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de E .
- (b) Déterminer $\ker(\varphi_A)$, puis montrer que φ_A est un automorphisme de E .
5. (a) Déterminer la matrice M_A de φ_A dans la base (I, J, K, L) .
- (b) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $\ker(\varphi_A - Id)$ et $\ker(\varphi_A + Id)$.

- (c) Montrer qu'il existe une base de A dans laquelle la matrice φ_A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$).

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E , on associe la fonction $T(f)$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

1. (a) Soit $f \in E$. Prouver que la fonction $T(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $(T(f))'(x)$ en fonction de f et de x .
(b) Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(2\pi x)$. Déterminer $T(f)$.
2. (a) Justifier que T est un endomorphisme de E .
(b) T est-il injectif? surjectif? Justifier.
3. Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E .
(a) Justifier que F est stable par T .
(b) On note U la restriction de l'application T à F . Cette application U est alors un endomorphisme de F .
Déterminer la matrice de U dans la base canonique $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2)$ où pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k$.
(c) U est-il un automorphisme de F ?