
TD 8 - Dénombrement et introduction aux probabilités

Exercice 1.

Un mot de trois lettres est ici une 3-liste ordonnée, avec répétitions possibles, de lettres parmi les 26 lettres de l'alphabet (6 voyelles et 20 consonnes), n'ayant pas nécessairement une signification.

Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1. en tout
2. deux à deux distinctes
3. ayant exactement deux lettres identiques
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne.

Exercice 2.

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4,5 et 6 sont rouges, les boules 7, 8,9 et 10 sont vertes. On tire dans l'urne, successivement et avec remise, 5 boules. On appelle résultat la liste ordonnée des cinq numéros des boules tirées. Par exemple, un résultat possible est (3, 7, 10, 3, 6). Déterminer le nombre de résultats :

1. en tout
2. pour lesquels les 5 boules sont toutes de la même couleur
3. pour lesquels les 4 couleurs apparaissent parmi les 5 boules
4. pour lesquels la boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

Exercice 3.

Une encyclopédie en 10 tomes est "rangée" sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles ?
2. Pour combien d'entre eux les tomes 1,2,3 sont-ils côte à côte ?

Exercice 4.

Dans une classe de 30 élèves, la LV1 est obligatoire (anglais ou allemand) et une LV2 et une seule est facultative (anglais ou allemand ou espagnol). On sait qu'il y a :

- 3 élèves qui font anglais en LV1 et pas de LV2
- 28 élèves qui font anglais en LV1 ou en LV2
- 20 élèves qui font allemand en LV1 ou en LV2
- 4 élèves qui ne font pas LV2
- il y a deux fois plus d'élèves qui font anglais en LV1 et allemand en LV2 que d'élèves qui font allemand en LV1 et anglais en LV2.

Pour chaque LV1 et chaque LV2, déterminer le nombre d'élèves faisant cette LV1, faisant cette LV2.

Exercice 5.

L'étude d'un groupe de 1050 personnes donne les résultats suivants : 312 actifs (A), 470 personnes mariées (M), 525 bacheliers (B) dont 42 actifs, 147 bacheliers mariés, 86 actifs mariés dont 25 bacheliers. En considérant $\text{Card}(A \cup B \cup M)$, montrer que cette étude est inexacte.

Exercice 6.

On choisit simultanément 5 cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes de façon à constituer ce qu'on appelle une main.

1. Quel est le nombre de mains contenant 2 valets ?
2. Quel est le nombre de mains contenant exactement une paire.
3. Quel est le nombre de mains contenant exactement 2 valets et 2 coeurs ?

Exercice 7.

Une anagramme est un mot, ayant un sens ou non, utilisant les mêmes lettres, le même nombre de fois, qu'un mot donné.

1. Combien y-a-il d'anagrammes au mot surjection ?
2. Combien y-a-il d'anagrammes au mot injection ?

Exercice 8.

Une course oppose 20 concurrents, dont Emile

1. Combien y-a-t-il de podium possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums possibles où Emile est premier ?
3. Combien y a-t-il de podiums possibles dont Emile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 9.

Calculer, pour tout $n \geq 2$, la somme $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$.

Exercice 10.

Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k \leq n$.

1. Montrer que $\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k}$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^{n-i} = \binom{n}{k} (1+x)^{n-k}$.

Exercice 11.

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leq n$.

1. Démontrer par récurrence sur n la formule de Pascal généralisée : $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. En écrivant $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, retrouver la formule de Pascal généralisée.

Exercice 12.

Déterminer $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}$.

Exercice 13.

Dans une population de n personnes, quelle est la probabilité qu'il y ait deux personnes qui partagent le même anniversaire ?

Exercice 14.

Une urne U_1 contient 10 boules dont x sont marquées G , et une urne U_2 10 boules dont y sont marquées G . A et B jouent de la manière suivante : A tire 2 boules dans U_1 : s'il obtient deux G , il a gagné, sinon, B tire 1 boule dans U_2 et il gagne s'il obtient un G . Si personne ne gagne, les boules sont remises dans les urnes et on recommence.

1. Calculer la probabilité que A gagne, que B gagne, que la partie ne se termine pas.
2. Déterminer x et y pour que ce jeu soit équitable.

Exercice 15.

Trois classes préparatoires ont respectivement 44, 33, 30 élèves et des probabilités de réussite au concours de $1/2$, $1/3$, $1/4$. Un élève est admis. Quelle est la probabilité qu'il provienne de la deuxième classe ?

Exercice 16. *Promenade aléatoire dans le plan.*

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un pion se trouve à l'origine à l'instant 0 et se déplace de la manière suivante : à chaque instant n , $n \in \mathbb{N}$, il fait une translation de vecteur $\vec{i}$ ou de vecteur $\vec{j}$ avec la même probabilité.

Quelle est la probabilité qu'il passe par le point de coordonnées (p, q) , p et q étant des éléments de $\mathbb{N}$?

Exercice 17.

Une urne contient 5 boules rouges et 4 boules vertes. On extrait 3 boules au hasard, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité qu'on obtienne 2 boules vertes ?

Exercice 18.

Dans une population, $1/4$ des individus sont vaccinés contre la fièvre bleue. Au cours d'une épidémie, on dénombre 1 malade vacciné pour 5 malades, et on note qu'un vacciné sur 12 est tout bleu. La maladie n'est pas très esthétique, mais une piqûre, ça peut faire mal. Que faire ?

Exercice 19.

Le jour de l'ouverture de la chasse, on compte $1/4$ de faisans d'élevage pour $3/4$ de faisans sauvages. Le soir, il y a un faisan d'élevage tué pour 2 faisans sauvages, et un tué sur 6 parmi les faisans d'élevage.

1. Est-ce que les qualités "élevage" et "tué" sont indépendantes ?
2. Quelle est la probabilité de se faire tuer, pour un faisan sauvage ?

Exercice 20.

Un voyageur prend le train ou l'avion chaque jour de la manière suivante :

- Si au jour $i - 1$ il prend le train, il prendra l'avion le lendemain avec la probabilité $1/2$.
- Si au jour $i - 1$ il prend l'avion, le lendemain il prend le train.

On note p_n la probabilité de prendre le train au jour n . Calculer p_n en fonction de n , sachant que le premier jour il prend le train.

Exercice 21.

Une particule possède trois états possibles et passe de l'un à l'autre, à chaque seconde, de la manière suivante :

- de l'état A à l'état A ou B ou C de manière équiprobable.
- de l'état B à l'état A ou B ou C de manière équiprobable.
- de l'état C à l'état A .

Au départ de l'expérience, la particule est à l'état A .

On définit, pour tout entier naturel n , les événements :

- A_n : « être à l'état A à l'instant n »
- B_n : « être à l'état B à l'instant n »
- C_n : « être à l'état C à l'instant n »

ainsi que les nombres :

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n)$$

1. Déterminer les expressions de a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
2. Exprimer le nombre a_{n+1} en fonction de a_n .
(On pensera à utiliser le fait que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n + c_n = 1$.)
3. Exprimer les nombres a_n , b_n et c_n en fonction de n .
4. Déterminer leurs limites respectives.

Exercice 22.

On dispose de deux urnes U et V.

L'urne U contient a boules blanches et b boules noires.

L'urne V contient b boules blanches et a boules noires.

On choisit une urne au départ, puis on en tire une boule. Si elle est blanche on la remet et on tire dans U, sinon on la remet et on tire dans V, etc. . .

On note B_n l'événement "la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche" et $p_n = P(B_n)$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1} .
2. Calculer p_n quand on commence par U, puis lorsqu'on commence par V.
3. Déterminer la limite de p_n .

Exercice 23.

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour ceux-ci, la probabilité d'obtenir un 6 est $1/2$.

On choisit un dé, on le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

Exercice 24.

Lors d'un oral, cinq sujets sont proposés à cinq candidats qui choisissent à tour de rôle. Vous avez fait l'impasse sur un sujet. Vaut-il mieux passer le 1^{er}, le second, . . . , le dernier?

Exercice 25.

Le finaliste d'un jeu télévisé est placé face à 3 portes P_1 , P_2 et P_3 . Derrière l'une d'entre elles il y a une voiture et derrière les deux autres il n'y a rien. L'animateur sait derrière quelle porte se trouve la voiture et n'ouvre pas directement celle-ci, pour ménager le suspense. Le candidat choisit la porte P_1 . L'animateur ouvre la porte P_3 , derrière laquelle le candidat constate qu'il n'y a rien et l'animateur propose au candidat de changer son choix s'il le souhaite.

On note V_i l'évènement "la voiture est derrière la porte P_i " et E l'évènement "l'animateur ouvre la porte P_3 ".

1. (a) Déterminer sans calcul $P_{V_1}(E)$, $P_{V_2}(E)$ et $P_{V_3}(E)$.
(b) Calculer $P_E(V_1)$ et $P_E(V_2)$.
2. Le candidat a-t-il intérêt à changer son choix?