

Résolutions des équations différentielles

ECG2 - mathématiques appliquées

Rappel de méthode

1. **Caractériser** : "On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (ou 2) à coefficients constants".
2. **Résoudre** l'équation homogène associée (appliquer les formules ci-dessous).
3. **Déterminer** une solution particulière y_p si nécessaire.
4. **Conclure** : $y = y_H + y_p$.

Premier ordre. Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y_H(t) = Ce^{-at}$, $C \in \mathbb{R}$.

Second ordre. Pour $y'' + ay' + by = 0$, résoudre $r^2 + ar + b = 0$.

Si deux racines r_1 et r_2 alors : $y_H(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.

Si r_0 est unique racine : $y_H(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$.

Dans les deux cas, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière. Essayer la forme indiquée, calculer les dérivées, substituer et identifier les coefficients. Pour $y' + ay = b$ avec $a \neq 0$, on peut prendre $y_p = b/a$.

Conditions initiales. Partir de la solution générale, puis déterminer les constantes à l'aide des valeurs imposées à y et, au second ordre, à y' .

1. Applications

Exercice 1 Équations du premier ordre homogènes

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y' + 3y = 0$.
- b) $2y' - 5y = 0$.
- c) $4y' + y = 0$.

Exercice 2 Premier ordre avec second membre constant

Résoudre sur $\mathbb{R}$ en précisant l'homogène, une solution particulière et l'ensemble des solutions :

- a) $y' + 2y = 6$.
- b) $3y' - 6y = 9$.
- c) $2y' + 5y = 4$.

Exercice 3 Solution particulière polynomiale

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y' + 2y = 3t + 1$, en cherchant une solution particulière $y_p(t) = at + b$.
2. $y' - y = t^2 + 1$, en cherchant une solution particulière $y_p(t) = at^2 + bt + c$.

Exercice 4 Solution particulière exponentielle

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y' + 2y = e^{3t}$, en essayant $y_p(t) = ae^{3t}$.
- b) $y' - 3y = 2e^{-t}$, en essayant $y_p(t) = ae^{-t}$.

Exercice 5 Conditions initiales au premier ordre

Déterminer sur $\mathbb{R}$ l'unique solution satisfaisant la condition donnée :

1. $y' + 2y = 4$, avec $y(0) = 3$.
2. $y' - y = t$, avec $y(0) = 1$. Chercher une particulière affine.
3. $2y' + y = 3$, avec $y(2) = 0$.

Exercice 6 Équations homogènes du second ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
- b) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
- c) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

Exercice 7 Second ordre avec solution particulière

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y'' - 3y' + 2y = 4$.
- b) $y'' - 3y' + 2y = t$, en essayant $y_p(t) = at + b$.
- c) $y'' + y' = e^{2t}$, en essayant $y_p(t) = ae^{2t}$.

Exercice 8 Conditions initiales au second ordre

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la solution de $(E) : y'' - y' - 2y = 3$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9 Principe de superposition

On considère sur $\mathbb{R}$ (E) : $y'' - 3y' + 2y = t + e^{3t}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Déterminer une solution particulière de (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = t$, sous la forme $y_1(t) = at + b$.
3. Déterminer une solution particulière de (E_2) : $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, sous la forme $y_2(t) = ce^{3t}$.
4. Utiliser la superposition pour résoudre (E).

Exercice 10 Résolution complète

On considère sur $\mathbb{R}$ (E) : $2y'' + y' - y = t + 2$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Chercher une solution particulière $y_p(t) = at + b$.
3. Résoudre (E).
4. Déterminer la solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

2. Problèmes**Problème 1 Premier ordre et système différentiel**

Adaptation du sujet zéro ECRICOME, mathématiques appliquées ECG, concours 2023, exercice 1, questions 8 et 9. Le contexte matriciel est simplifié. Sujet source. On étudie trois fonctions α, β, γ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\gamma' = 6\gamma, \quad \beta' = 2\beta, \quad \alpha' = 2\alpha + 2\beta.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ (E_1) : $\varphi' = 6\varphi$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ (E_2) : $\varphi' = 2\varphi$.
3. Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère (E_3) : $\varphi' = 2\varphi + ce^{2t}$.
 - a) Montrer que $t \mapsto cte^{2t}$ est une solution particulière de (E_3).
 - b) Déterminer toutes les solutions de (E_3).
4. Écrire $\gamma(t) = \lambda_3 e^{6t}$ et $\beta(t) = \lambda_1 e^{2t}$. En déduire toutes les fonctions α vérifiant la troisième équation du système.
5. Donner toutes les solutions du système et préciser dans quelles composantes apparaissent les termes e^{6t} , e^{2t} et te^{2t} .

Problème 2 Équation différentielle et étude asymptotique

On considère sur $\mathbb{R}$ (E) : $y'' - 3y' + 2y = 2t + e^{3t}$.

Partie A – Résolution de l'équation

1. Résoudre l'équation homogène (H) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Chercher une solution particulière de (E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 2t$, sous la forme $y_1(t) = at + b$.
3. Chercher une solution particulière de (E_2) : $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, sous la forme $y_2(t) = ce^{3t}$.
4. À l'aide de la superposition, déterminer toutes les solutions de (E).
5. Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Partie B – Étude de la solution Pour cette partie, on pourra admettre que

$$f(t) = -\frac{5}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

6. Identifier le terme prépondérant de $f(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et justifier en comparant les autres termes à e^{3t} .
7. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{e^{3t}}$, puis donner un équivalent de $f(t)$ et sa limite en $+\infty$.
8. On pose $g(t) = e^{-3t}f(t)$.
 - a) Calculer $g'(t)$.
 - b) Étudier la limite de $g'(t)/e^{-t}$ et en déduire le sens de variation de g sur un intervalle suffisamment grand.
 - c) Montrer, plus précisément, que g est strictement décroissante sur $[\ln(10), +\infty[$.