

Résolutions des équations différentielles

ECG2 - mathématiques appliquées

Rappel de méthode

1. **Caractériser** : "On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (ou 2) à coefficients constants".
2. **Résoudre** l'équation homogène associée (appliquer les formules ci-dessous).
3. **Déterminer** une solution particulière y_p si nécessaire.
4. **Conclure** : $y = y_H + y_p$.

Premier ordre. Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y_H(t) = Ce^{-at}$, $C \in \mathbb{R}$.

Second ordre. Pour $y'' + ay' + by = 0$, résoudre $r^2 + ar + b = 0$.

Si deux racines r_1 et r_2 alors : $y_H(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.

Si r_0 est unique racine : $y_H(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$.

Dans les deux cas, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Solution particulière. Essayer la forme indiquée, calculer les dérivées, substituer et identifier les coefficients. Pour $y' + ay = b$ avec $a \neq 0$, on peut prendre $y_p = b/a$.

Conditions initiales. Partir de la solution générale, puis déterminer les constantes à l'aide des valeurs imposées à y et, au second ordre, à y' .

1. Applications

Exercice 1 Équations du premier ordre homogènes

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y' + 3y = 0$.
- b) $2y' - 5y = 0$.
- c) $4y' + y = 0$.

Correction.

Ce sont des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

- a) Le coefficient de y est $a = 3$. D'après le cours, $S = \{t \mapsto Ce^{-3t}, C \in \mathbb{R}\}$.
- b) En divisant par 2, on obtient $y' - \frac{5}{2}y = 0$. Ici $a = -5/2$, donc $-a = 5/2$ et $S = \{t \mapsto Ce^{5t/2}, C \in \mathbb{R}\}$.
- c) On divise par 4 : $y' + \frac{1}{4}y = 0$. Ainsi $S = \{t \mapsto Ce^{-t/4}, C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 Premier ordre avec second membre constant

Résoudre sur $\mathbb{R}$ en précisant l'homogène, une solution particulière et l'ensemble des solutions :

- a) $y' + 2y = 6$.
- b) $3y' - 6y = 9$.
- c) $2y' + 5y = 4$.

Correction.

Ce sont des équations différentielles linéaires non homogènes du premier ordre à coefficients constants.

- a) L'homogène $y' + 2y = 0$ donne $y_H(t) = Ce^{-2t}$. Une fonction constante $y_p(t) = k$ est solution si $2k = 6$, donc $k = 3$. Ainsi $S = \{t \mapsto Ce^{-2t} + 3, C \in \mathbb{R}\}$.
- b) L'homogène est $3y' - 6y = 0$, soit $y' - 2y = 0$: $y_H(t) = Ce^{2t}$. Une constante k convient si $-6k = 9$, donc $k = -3/2$. Ainsi $S = \{t \mapsto Ce^{2t} - \frac{3}{2}, C \in \mathbb{R}\}$.
- c) L'homogène $2y' + 5y = 0$ s'écrit $y' + \frac{5}{2}y = 0$: $y_H(t) = Ce^{-5t/2}$. Pour une constante k , $5k = 4$, d'où $k = 4/5$. Ainsi $S = \{t \mapsto Ce^{-5t/2} + \frac{4}{5}, C \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3 Solution particulière polynomiale

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y' + 2y = 3t + 1$, en cherchant une solution particulière $y_p(t) = at + b$.
2. $y' - y = t^2 + 1$, en cherchant une solution particulière $y_p(t) = at^2 + bt + c$.

Correction.

1. L'équation est linéaire du premier ordre à coefficients constants, non homogène. L'homogène $y' + 2y = 0$ donne $y_H(t) = Ce^{-2t}$. Pour $y_p(t) = at + b$, $y'_p(t) = a$. Ainsi

$$y_p \text{ est solution} \iff \forall t \in \mathbb{R}, 2at + a + 2b = 3t + 1$$

$$\iff \begin{cases} 2a = 3, \\ a + 2b = 1. \end{cases}$$

On obtient $a = 3/2$ et $b = -1/4$. Par conséquent,

$$S = \left\{ t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. L'équation est linéaire du premier ordre à coefficients constants, non homogène. L'homogène $y' - y = 0$ donne $y_H(t) = Ce^t$. Pour $y_p(t) = at^2 + bt + c$, on a $y'_p(t) = 2at + b$, donc

$$y'_p(t) - y_p(t) = -at^2 + (2a - b)t + b - c.$$

L'égalité avec $t^2 + 1$ pour tout t équivaut à

$$-a = 1, \quad 2a - b = 0, \quad b - c = 1.$$

D'où $a = -1$, $b = -2$, $c = -3$. Ainsi $S = \{ t \mapsto Ce^t - t^2 - 2t - 3, C \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 4 Solution particulière exponentielle

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y' + 2y = e^{3t}$, en essayant $y_p(t) = ae^{3t}$.
 b) $y' - 3y = 2e^{-t}$, en essayant $y_p(t) = ae^{-t}$.

Correction.

Il s'agit de deux équations linéaires du premier ordre à coefficients constants, non homogènes.

- a) L'homogène donne $y_H(t) = Ce^{-2t}$. Pour $y_p(t) = ae^{3t}$, $y'_p(t) = 3ae^{3t}$, donc $y'_p + 2y_p = 5ae^{3t}$. Comme $e^{3t} \neq 0$, la fonction convient si et seulement si $5a = 1$. Ainsi $a = 1/5$ et $S = \{ t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}, C \in \mathbb{R} \}$.
 b) L'homogène $y' - 3y = 0$ donne $y_H(t) = Ce^{3t}$. Pour $y_p(t) = ae^{-t}$, $y'_p(t) = -ae^{-t}$, d'où $y'_p - 3y_p = -4ae^{-t}$. On doit avoir $-4a = 2$, soit $a = -1/2$. Ainsi $S = \{ t \mapsto Ce^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t}, C \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 5 Conditions initiales au premier ordre

Déterminer sur $\mathbb{R}$ l'unique solution satisfaisant la condition donnée :

1. $y' + 2y = 4$, avec $y(0) = 3$.
 2. $y' - y = t$, avec $y(0) = 1$. Chercher une particulière affine.
 3. $2y' + y = 3$, avec $y(2) = 0$.

Correction.

1. L'homogène donne Ce^{-2t} et la constante 2 est une particulière car $2 \times 2 = 4$. Ainsi $y(t) = Ce^{-2t} + 2$. La condition $y(0) = 3$ impose $C + 2 = 3$, donc $y(t) = e^{-2t} + 2$.
 2. L'homogène donne Ce^t . Pour $y_p(t) = at + b$, on a $y'_p - y_p = -at + a - b$. L'identification avec t donne $-a = 1$ et $a - b = 0$, donc $a = b = -1$. Ainsi $y(t) = Ce^t - t - 1$. La condition impose $C - 1 = 1$, soit $C = 2$. Donc $y(t) = 2e^t - t - 1$.
 3. L'homogène $y' + \frac{1}{2}y = 0$ donne $Ce^{-t/2}$. La constante 3 est une particulière. Ainsi $y(t) = Ce^{-t/2} + 3$. La condition $y(2) = 0$ équivaut à $Ce^{-1} + 3 = 0$, donc $C = -3e$. Finalement $y(t) = 3 - 3e^{1-t/2}$.

Dans chaque cas, la condition détermine une seule constante : la solution est unique.

Exercice 6 Équations homogènes du second ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
 b) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
 c) $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

Correction.

Il s'agit d'équations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants.

- a) L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$. Ses racines réelles distinctes sont 2 et 3. Donc $S = \{ t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$.
 b) L'équation caractéristique est $r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2 = 0$. Elle admet la racine double -3 . Ainsi $S = \{ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{-3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$.
 c) L'équation caractéristique est $2r^2 - 5r + 2 = 0$. Son discriminant vaut $25 - 16 = 9$, donc ses racines sont $(5 - 3)/4 = 1/2$ et $(5 + 3)/4 = 2$. Ainsi $S = \{ t \mapsto \lambda e^{t/2} + \mu e^{2t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 7 Second ordre avec solution particulière

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

- a) $y'' - 3y' + 2y = 4$.
 b) $y'' - 3y' + 2y = t$, en essayant $y_p(t) = at + b$.
 c) $y'' + y' = e^{2t}$, en essayant $y_p(t) = ae^{2t}$.

Correction.

Ce sont des équations linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes.

- L'homogène a pour équation caractéristique $(r-1)(r-2) = 0$, donc $y_H(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$. Pour une constante k , le membre de gauche vaut $2k$. Prendre $k = 2$. Ainsi $S = \{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + 2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- L'homogène est la même. Pour $y_p(t) = at + b$, $y_p' = a$ et $y_p'' = 0$. Ainsi $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2at + 2b - 3a$. L'identification donne $2a = 1$ et $2b - 3a = 0$, donc $a = 1/2$ et $b = 3/4$. Ainsi $S = \{t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- L'homogène $y'' + y' = 0$ a pour équation caractéristique $r(r+1) = 0$. Donc $y_H(t) = \lambda + \mu e^{-t}$. Pour $y_p(t) = ae^{2t}$, $y_p' = 2ae^{2t}$ et $y_p'' = 4ae^{2t}$. Ainsi $y_p'' + y_p' = 6ae^{2t}$, d'où $a = 1/6$. Finalement $S = \{t \mapsto \lambda + \mu e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 8 Conditions initiales au second ordre

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la solution de $(E) : y'' - y' - 2y = 3$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Correction.

- Caractérisation.** L'équation est linéaire du second ordre à coefficients constants, non homogène.
- Homogène.** L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0$. Ses racines sont 2 et -1 , donc $y_H(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t}$.
- Particulière.** Une constante k convient si $-2k = 3$, donc $y_p = -3/2$.
- Solution générale et conditions.** On obtient

$$y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{-t} - \frac{3}{2}, \quad y'(t) = 2\lambda e^{2t} - \mu e^{-t}.$$

Les conditions équivalent à $\lambda + \mu = 5/2$ et $2\lambda - \mu = 0$. La seconde donne $\mu = 2\lambda$; la première devient $3\lambda = 5/2$. Ainsi $\lambda = 5/6$ et $\mu = 5/3$. L'unique solution cherchée est

$$y(t) = \frac{5}{6}e^{2t} + \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{3}{2}.$$

Exercice 9 Principe de superposition

On considère sur $\mathbb{R}$ $(E) : y'' - 3y' + 2y = t + e^{3t}$.

- Résoudre l'équation homogène associée.
- Déterminer une solution particulière de $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = t$, sous la forme $y_1(t) = at + b$.
- Déterminer une solution particulière de $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, sous la forme $y_2(t) = ce^{3t}$.
- Utiliser la superposition pour résoudre (E) .

Correction.

- L'équation caractéristique est $(r-1)(r-2) = 0$, donc $y_H(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $y_1' = a$, $y_1'' = 0$, donc $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 2at + 2b - 3a$. L'identification donne $2a = 1$ et $2b - 3a = 0$, soit $a = 1/2$, $b = 3/4$. Ainsi $y_1(t) = t/2 + 3/4$.
- $y_2' = 3ce^{3t}$, $y_2'' = 9ce^{3t}$, d'où $y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = (9 - 9 + 2)ce^{3t} = 2ce^{3t}$. Donc $c = 1/2$ et $y_2(t) = e^{3t}/2$.
- Par linéarité, $(y_1 + y_2)'' - 3(y_1 + y_2)' + 2(y_1 + y_2) = t + e^{3t}$. Ainsi $y_p = y_1 + y_2$ est une particulière de (E) et

$$S = \left\{ t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 10 Résolution complète

On considère sur $\mathbb{R}$ $(E) : 2y'' + y' - y = t + 2$.

- Résoudre l'équation homogène associée.
- Chercher une solution particulière $y_p(t) = at + b$.
- Résoudre (E) .
- Déterminer la solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Correction.

L'équation est linéaire du second ordre à coefficients constants, non homogène.

- L'équation caractéristique est $2r^2 + r - 1 = (2r-1)(r+1) = 0$. Ses racines distinctes sont $1/2$ et -1 , donc $y_H(t) = \lambda e^{t/2} + \mu e^{-t}$.
- Pour $y_p(t) = at + b$, on a $y_p' = a$ et $y_p'' = 0$. Ainsi $2y_p'' + y_p' - y_p = -at + a - b$. L'identification avec $t + 2$ donne $-a = 1$ et $a - b = 2$, soit $a = -1$, $b = -3$. Une particulière est $y_p(t) = -t - 3$.
- $S = \{t \mapsto \lambda e^{t/2} + \mu e^{-t} - t - 3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
- La dérivée est $y'(t) = \frac{\lambda}{2}e^{t/2} - \mu e^{-t} - 1$. Les conditions donnent $\lambda + \mu = 4$ et $\lambda/2 - \mu = 1$. En additionnant, $3\lambda/2 = 5$, donc $\lambda = 10/3$, puis $\mu = 2/3$. L'unique solution cherchée est

$$y(t) = \frac{10}{3}e^{t/2} + \frac{2}{3}e^{-t} - t - 3.$$

2. Problèmes**Problème 1 Premier ordre et système différentiel**

Adaptation du sujet zéro ECRICOME, mathématiques appliquées ECG, concours 2023, exercice 1, questions 8 et 9. Le contexte matriciel est simplifié. Sujet source. On étudie trois fonctions α, β, γ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\gamma' = 6\gamma, \quad \beta' = 2\beta, \quad \alpha' = 2\alpha + 2\beta.$$

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ $(E_1) : \varphi' = 6\varphi$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $(E_2) : \varphi' = 2\varphi$.
3. Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère $(E_3) : \varphi' = 2\varphi + ce^{2t}$.
 - a) Montrer que $t \mapsto cte^{2t}$ est une solution particulière de (E_3) .
 - b) Déterminer toutes les solutions de (E_3) .
4. Écrire $\gamma(t) = \lambda_3 e^{6t}$ et $\beta(t) = \lambda_1 e^{2t}$. En déduire toutes les fonctions α vérifiant la troisième équation du système.
5. Donner toutes les solutions du système et préciser dans quelles composantes apparaissent les termes e^{6t} , e^{2t} et te^{2t} .

Correction.

1. (E_1) s'écrit $\varphi' - 6\varphi = 0$: c'est une équation linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants. D'après le cours, ses solutions sont $\varphi(t) = Ae^{6t}$, avec $A \in \mathbb{R}$.
2. De même, (E_2) s'écrit $\varphi' - 2\varphi = 0$. Ses solutions sont $\varphi(t) = Be^{2t}$, avec $B \in \mathbb{R}$.
3. a) La fonction $\varphi_p : t \mapsto cte^{2t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la règle du produit,

$$\varphi_p'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t} = 2\varphi_p(t) + ce^{2t}.$$

Elle satisfait donc (E_3) pour tout $t \in \mathbb{R}$: c'est une solution particulière.

- b) L'homogène associée est $\varphi' - 2\varphi = 0$, dont les solutions sont Ke^{2t} . On ajoute la particulière obtenue :

$$S = \{t \mapsto (K + ct)e^{2t}, K \in \mathbb{R}\}.$$

4. Puisque $\beta(t) = \lambda_1 e^{2t}$, la troisième équation devient $\alpha' - 2\alpha = 2\lambda_1 e^{2t}$. La question précédente s'applique avec $c = 2\lambda_1$: $\alpha(t) = (\lambda_2 + 2\lambda_1 t)e^{2t}$, avec $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
5. Toutes les solutions du système sont donc

$$\begin{cases} \alpha(t) = (\lambda_2 + 2\lambda_1 t)e^{2t}, \\ \beta(t) = \lambda_1 e^{2t}, \\ \gamma(t) = \lambda_3 e^{6t}, \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, ces fonctions vérifient bien les trois équations, par dérivation. Le terme e^{6t} apparaît dans γ , e^{2t} dans β et α , et te^{2t} dans α (les termes peuvent s'annuler selon les constantes).

Pourquoi un facteur t ? Si l'on essayait seulement ae^{2t} dans (E_3) , on obtiendrait $\varphi' - 2\varphi = 0$: cela ne convient pas si $c \neq 0$. Le facteur t permet d'obtenir le second membre demandé.

Problème 2 Équation différentielle et étude asymptotique

On considère sur $\mathbb{R}$ $(E) : y'' - 3y' + 2y = 2t + e^{3t}$.

Partie A – Résolution de l'équation

1. Résoudre l'équation homogène $(H) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Chercher une solution particulière de $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 2t$, sous la forme $y_1(t) = at + b$.
3. Chercher une solution particulière de $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, sous la forme $y_2(t) = ce^{3t}$.
4. À l'aide de la superposition, déterminer toutes les solutions de (E) .
5. Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Partie B – Étude de la solution Pour cette partie, on pourra admettre que

$$f(t) = -\frac{5}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

6. Identifier le terme prépondérant de $f(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et justifier en comparant les autres termes à e^{3t} .
7. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{e^{3t}}$, puis donner un équivalent de $f(t)$ et sa limite en $+\infty$.
8. On pose $g(t) = e^{-3t}f(t)$.
 - a) Calculer $g'(t)$.
 - b) Étudier la limite de $g'(t)/e^{-t}$ et en déduire le sens de variation de g sur un intervalle suffisamment grand.
 - c) Montrer, plus précisément, que g est strictement décroissante sur $[\ln(10), +\infty[$.

Correction.**Partie A**

1. (H) est une équation linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$. Elle a deux racines réelles distinctes, 1 et 2. Ainsi $y_H(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Pour $y_1(t) = at + b$, $y_1' = a$ et $y_1'' = 0$. Ainsi $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 2at + 2b - 3a$. L'égalité avec $2t$ pour tout t équivaut à $2a = 2$ et $2b - 3a = 0$. D'où $a = 1$, $b = 3/2$, donc $y_1(t) = t + 3/2$.
3. Pour $y_2(t) = ce^{3t}$, $y_2' = 3ce^{3t}$ et $y_2'' = 9ce^{3t}$. Ainsi $y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 2ce^{3t}$. Puisque $e^{3t} > 0$, on doit avoir $2c = 1$, soit $c = 1/2$. Une particulière est $y_2(t) = e^{3t}/2$.
4. Par linéarité, $y_p = y_1 + y_2$ est une particulière pour le second membre $2t + e^{3t}$. Toutes les solutions de (E) sont donc

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t} + t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{3t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5. On dérive : $y'(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{2t} + 1 + \frac{3}{2}e^{3t}$. Les conditions initiales donnent

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2 = 0, \\ \lambda + 2\mu + \frac{5}{2} = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = -2, \\ \lambda + 2\mu = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Par soustraction, $\mu = 1/2$, puis $\lambda = -5/2$. Il existe donc une unique solution répondant aux conditions :

$$f(t) = -\frac{5}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Partie B

6. On compare chaque terme à e^{3t} :

$$\frac{e^t}{e^{3t}} = e^{-2t} \rightarrow 0, \quad \frac{e^{2t}}{e^{3t}} = e^{-t} \rightarrow 0, \quad \frac{t}{e^{3t}} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{e^{3t}} \rightarrow 0.$$

La troisième limite découle des croissances comparées. Le terme prépondérant est donc $e^{3t}/2$.

7. En divisant l'expression de f par e^{3t} ,

$$\frac{f(t)}{e^{3t}} = -\frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + (t + \frac{3}{2})e^{-3t} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainsi $f(t)/(e^{3t}/2) \rightarrow 1$, donc $f(t) \sim \frac{1}{2}e^{3t}$ et $f(t) \rightarrow +\infty$.

8. a) On a $g(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + (t + \frac{3}{2})e^{-3t} + \frac{1}{2}$. En dérivant le produit $(t + \frac{3}{2})e^{-3t}$, on obtient $[1 - 3(t + \frac{3}{2})]e^{-3t} = -(3t + \frac{7}{2})e^{-3t}$. D'où

$$g'(t) = 5e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} - (3t + \frac{7}{2})e^{-3t}.$$

- b) Comme $e^{-t} > 0$,

$$\frac{g'(t)}{e^{-t}} = 5e^{-t} - \frac{1}{2} - (3t + \frac{7}{2})e^{-2t} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Cette limite est strictement négative : il existe T tel que $g'(t)/e^{-t} < 0$ pour tout $t \geq T$. Donc $g'(t) < 0$ pour $t \geq T$, et g est strictement décroissante sur $[T, +\infty[$.

- c) Si $t \geq \ln(10)$, $e^{-t} \leq 1/10$, donc $5e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} = e^{-t}(5e^{-t} - \frac{1}{2}) \leq 0$. De plus $t > 0$, donc $-(3t + \frac{7}{2})e^{-3t} < 0$. Ainsi $g'(t) < 0$ pour tout $t \geq \ln(10)$: g est strictement décroissante sur cet intervalle et tend vers $1/2$.